APLICACIONES FÍSICAS DE LA DERIVADA.
RAZONES DE VARIACIÓN DE VARIABLES RELACIONADAS

Considérese un movimiento rectilíneo de una partícula. A cada valor del tiempo "t" corresponde un cierto desplazamiento "s" de la partícula; luego la distancia recorrida es función del tiempo, es decir, que:

$$s = f(t)$$

Si "t" experimenta un incremento "Δt", la variable "s" también experimentará su correspondiente incremento "Δs" y el cociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ es la razón de variación de "s" con respecto a "t". Como es distancia sobre tiempo, se le llama rapidez de variación y equivale al módulo de la velocidad media de la partícula. Así,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \left|\overline{v}\right|_{\text{media}} = v_{media}$$

En el movimiento uniforme la velocidad es constante por lo que la velocidad media obtenida a partir del cociente anterior sería la misma durante todo el tiempo considerado. Sin embargo, cuando el movimiento es variado, esto es, cuando la velocidad experimenta cambios, entonces el módulo de la velocidad se obtendrá mediante la razón instantánea de variación de "s" con respecto a "t", la que se determina a través del límite:

$$\left|\overline{v}\right| = v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Con la aceleración, esto es, el cambio de la velocidad en la unidad de tiempo, también es posible aplicar estos conceptos y se obtendrían la aceleración media y la aceleración instantánea:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \left|\overline{a}\right|_{\text{media}} = a_{media}$$

$$\left|\overline{a}\right| = a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Ejemplo. Se tiene un movimiento vertical. De acuerdo a la Cinemática, la expresión que define a la aceleración es:

$$a=\frac{v_f-v_0}{t}$$ **si se trata de "caída libre":**

$$v_0=0 \quad y \quad a=g \quad (\text{aceleración de la gravedad})$$

y entonces,

$$g=\frac{v_f}{t} \quad \Rightarrow \quad v_f=gt \quad (\text{velocidad en caída libre})$$

Por otro lado, se sabe que la velocidad media está dada por $v=\frac{s}{t}$ **donde** "s" **es el espacio recorrido. Esta velocidad también se obtiene mediante la expresión** $v=\frac{v_0+v_f}{2}$ **y como se trata de caída libre,** $v_0=0$ **por lo que** $v=\frac{v_f}{2}$ **de donde:**

$$\frac{v_f}{2}=\frac{s}{t} \quad \Rightarrow \quad s=\frac{v_f t}{2}$$

Como $v_f=gt$**, se puede escribir que:**

$$s=\frac{gt^2}{2} \quad (\text{distancia recorrida en caída libre})$$

Se aplican las primeras dos derivadas, que definen los módulos de la velocidad y la aceleración, y se tiene:

$$s=\frac{gt^2}{2} \quad ; \quad v=\left|\overline{v}\right|=\frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad v=gt$$

$$a=\left|\overline{a}\right|=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad a=g$$

Se partió de la Física y con el Cálculo se llegó al mismo resultado.

Ejemplo. Se deja caer un objeto y cuando han transcurrido 3 **segundos, se requiere conocer su velocidad. Determinarla:**

i) **Mediante la aplicación numérica del límite de la velocidad media.**

ii) **A partir de la derivada del espacio recorrido.**

iii) **Por medio de la fórmula cinemática correspondiente.**

Solución.

i) **Se sabe que en "caída libre"** $s = f(t) = \frac{gt^2}{2}$ **y como** $g = 9.8\,\frac{m}{s^2}$**, entonces** $s = 4.9t^2$**. La velocidad media se obtiene con el cociente** $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ **y la instantánea a partir del límite:**

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Por lo que se construye la siguiente tabla:

t	Δt	$f(t+\Delta t)$	$f(t)$	Δs	$\frac{\Delta s}{\Delta t}$
3	**0.5**	**60.025**	**44.1**	**15.925**	**31.85**
3	**0.3**	**53.361**	**44.1**	**9.261**	**30.87**
3	**0.1**	**47.089**	**44.1**	**2.989**	**29.89**
3	**0.08**	**46.48336**	**44.1**	**2.38336**	**29.792**
3	**0.06**	**45.88164**	**44.1**	**1.78164**	**29.694**
3	**0.04**	**45.28384**	**44.1**	**1.18384**	**29.596**
3	**0.02**	**44.68996**	**44.1**	**0.58996**	**29.498**
3	**0.008**	**44.335514**	**44.1**	**0.235514**	**29.43925**
3	**0.004**	**44.217678**	**44.1**	**0.117678**	**29.4195**
3	**0.0008**	**44.123523**	**44.1**	**0.023523**	**29.40375**
3	**0.0004**	**44.111761**	**44.1**	**0.011761**	**29.4025**
3	**0.00008**	**44.102352**	**44.1**	**0.002352**	**29.400388**
3	**0.00006**	**44.101764**	**44.1**	**0.001764017**	**29.400283**
	$\downarrow$			$\downarrow$	$\downarrow$
	0			**0**	**29.4**

Como se observa, a medida que $\Delta t \to 0$**,** $\Delta s \to 0$ **y el cociente de ambos incrementos se aproxima al valor** 29.4**, que es la velocidad del objeto a los tres segundos de iniciar su caída. Luego** $v = 29.4\,\frac{m}{s}$

ii) **Como** $s = 4.9t^2$ **y** $v = \frac{ds}{dt}$**, entonces** $v = 9.8t$ **por lo que**

$$v\Big|_{t=3} = 29.4\ \frac{m}{s}$$

iii) **De acuerdo con la Cinemática, la velocidad en caída libre se determina mediante la fórmula:**

$$v = gt$$

por lo que cuando $t = 3\ s$ **se obtiene:**

$$v = 9.8(3) \quad \therefore \quad v = 29.4\ \frac{m}{s}$$

Ejemplo. Un cierto tipo de aeronaves tienen como especificaciones para el aterrizaje, entre otras, las siguientes: una aceleración de frenado de $14{,}500\ \frac{km}{h^2}$ **y sus distancias de pista están dadas por la expresión:** $s = 250\,t - 7250\,t^2$ **donde** $"t"$ **es el tiempo en el que recorre la distancia de pista** $"s"$**.**

i) **Si aterriza con una velocidad de** $250\ \frac{km}{h}$**, determinar su velocidad a los** $20\ s$ **de haber tocado tierra.**

ii) **Calcular la distancia total que recorre hasta detenerse y el tiempo que tarda, suponiendo que desde que aterriza frena hasta pararse totalmente.**

iii) **Dar una interpretación gráfica al problema planteado.**

Existen múltiples conceptos físicos en los que encuentran aplicación las derivadas.

$$\text{velocidad angular} = \frac{d\theta}{dt}$$

Se puede definir a la potencia mecánica instantánea como:

$$P = \frac{dT}{dt}$$

El gasto hidráulico, en un instante, se puede expresar como:

$$Q = \frac{dV}{dt}$$

Por otro lado, se puede tratar, para una determinada resistencia eléctrica, a la intensidad de la corriente como la derivada del voltaje con respecto a la le resistencia, esto es:

$$I = \frac{dV}{dR}$$

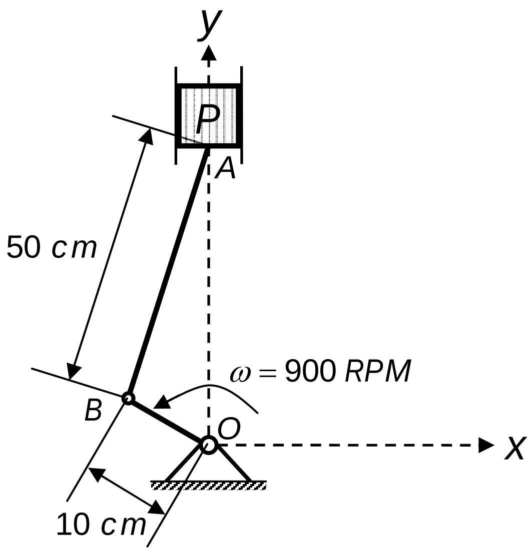
Existen problemas donde las variables experimentan razones de variación con respecto al tiempo y para resolverlos juega un papel de gran importancia la derivada.

Ejemplo. Una escalera indeformable, de $5.0\,m$ **de longitud, se encuentra apoyada en un piso horizontal y reclinada en una pared vertical. Si una persona jala la parte inferior de la escalera, alejándola de la pared, a una velocidad de** $1.5\,\frac{m}{s}$**, ¿con qué velocidad se deslizará hacia abajo la parte superior en el instante en que está a** $4\,m$ **del piso?**

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Un globo esférico está perdiendo aire a una rapidez de $100\dfrac{dm^3}{s}$. ¿Con qué rapidez está disminuyendo su radio en el instante en que mide $1m$?

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Un vehículo se mueve en una carretera horizontal recta. En un cierto punto de esta vía, sobre ella hay una torre de $40\,m$ en cuya punta se encuentra un observador. Si el vehículo se mueve de manera que su velocidad angular con respecto al observador es constante e igual a $0.10\dfrac{rad}{s}$, determinar la velocidad lineal del vehículo en las posiciones correspondientes a $0^0 \quad y \quad 30^0$.

Ejemplo. Una biela es un mecanismo elemental que convierte un movimiento circular en rectilíneo y viceversa. La biela de la figura se puede interpretar de cualquiera de las dos maneras siguientes:



A) El eje de un motor se encuentra en $"O"$ **y hace girar el brazo pequeño de la biela; ésta a su vez consigue que el pistón** $"P"$ **se mueva rectilínea y alternadamente hacia arriba y hacia abajo. (Este pistón puede ser el de una bomba reciprocante, por ejemplo).**

B) El pistón es el de un cilindro de motor de explosión interna (como el de los automóviles) que, al deslizarse de arriba abajo, hace girar el brazo menor de la biela y éste a su vez, al eje de una rueda en $"O"$**.**

Para este problema se aceptará la interpretación (A)**. Si el motor gira con una velocidad angular de** $900\,RPM$ **y las dimensiones son las de la figura, calcular la velocidad del pistón cuando el punto** $"B"$ **se encuentra sobre el eje de las abscisas.**

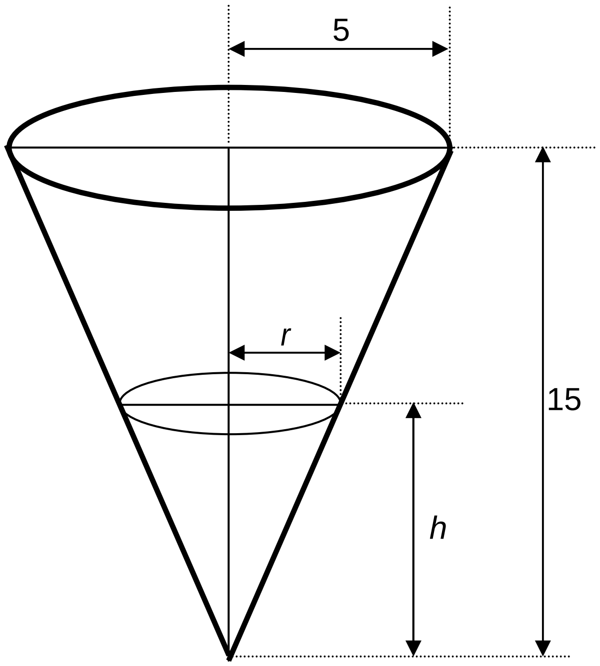
$\boxed{\text{Ejemplo}}$. **La lámpara de un poste en la calle se localiza a una altura de** $3\ m$ **y una persona cuya estatura es de** $1.70\,m$ **se aleja del poste con una velocidad de** $2\,\frac{m}{s}$ **. ¿Con qué velocidad se alarga la sombra y cuánto mide ésta cuando la persona se encuentra a** $3\ m$ **de la base del poste?**

$\boxed{\textbf{Ejemplo}}$. **Una rueda de la fortuna con un radio de** $10\ m$ **da una vuelta cada** $3\min$**. Si el centro de la rueda está a** $12\ m$ **del piso, determinar la rapidez con que asciende un pasajero cuando se encuentra a** $18\ m$ **del piso.**

$\boxed{\textbf{Ejemplo}}$. **Una piedra se deja caer a un estanque y produce ondas de agua que forman círculos concéntricos. El radio de una curva es de** $40t$ **centímetros a los** t **segundos. Calcular la rapidez de cambio del área del círculo en:**

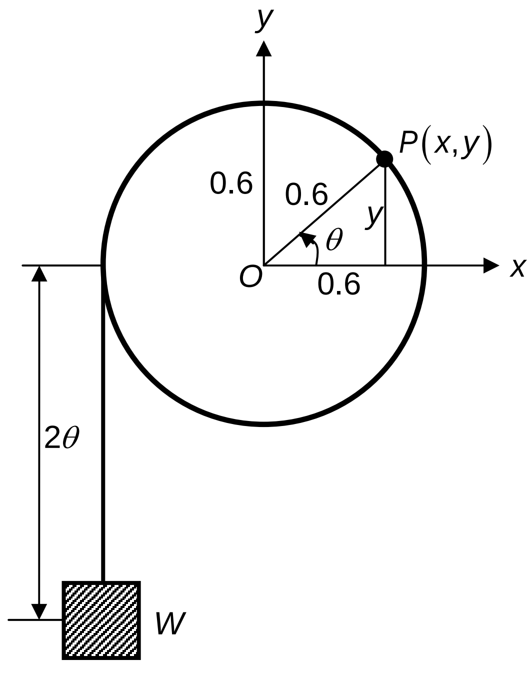
$$t = 1s \quad ; \quad t = 2\ s \quad ; \quad t = 3\ s$$

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. A un tanque cónico de radio $R=5\ m$ y altura $H=15\ m$, como se muestra en la figura, le entra un volumen de agua a razón de $1.5\dfrac{m^3}{\min}$. Determinar la rapidez de variación de la altura "h" del agua cuando ésta se encuentra a $5\ m$ del vértice.



$\boxed{\textbf{Ejemplo}}$. **Un avión pasa sobre una ciudad** $"A"$ **a las** $12:00\,h$**, a una velocidad constante de** $1000\,\frac{km}{h}$ **en dirección Este. Media hora más tarde, a la misma altura y en dirección Sur, otro avión sobrevuela la misma ciudad a una velocidad constante de** $1100\,\frac{km}{h}$ **. ¿Con qué velocidad se separarán las dos aeronaves a las** $14:00\,h$**?**

Ejemplo. Por gravedad cae un determinado peso que se encuentra en el extremo de una cuerda en un torno cuyo radio es de $0.6\ m$**, como se muestra en la figura. La distancia que desciende el peso es equivalente a** 2 **veces la medida en radianes del ángulo** $"\theta"$**. Por la teoría de la física, la distancia en caída libre es igual a** $\frac{g t^2}{2}$**, donde** $"g"$ **es la aceleración de la gravedad, igual a** $g = 9.8\ \frac{m}{s^2}$**. Calcular la rapidez de variación de la ordenada del punto** $"P"$ **del torno, en el instante en el que** $t = 1.3\ s$**.**



$\boxed{\textbf{Ejemplo}}$. **Se tiene una pileta de** $4.0\, m$ **de largo, cuya sección transversal es un trapecio con altura de** $60\, cm$ **y bases mayor y menor de** $1.2\, m \quad y \quad 40\, cm$ **. Está siendo llenada con agua a una velocidad de** 90 **litros por minuto. ¿A qué velocidad sube el nivel del agua en el instante en que está a** $25\, cm$ **del fondo?**

$\boxed{\textbf{Ejemplo}}$. **Un faro fue construido en una pequeña isla situada a** $3\,km$ **de la costa, la cual, frente al faro es recta. El haz luminoso del faro gira a una velocidad constante de** 0.16 **grados por minuto. Calcular la velocidad con la que se desplaza la luz a lo largo de la costa, en un punto localizado a** $2.5\,km$ **del punto de la costa más próximo al faro.**

LA DIFERENCIAL Y ALGUNAS APLICACIONES

Función diferenciable

Sea $y=f(x)$ una función derivable en un cierto valor $"x"$ para el cual se cumple que $f'(x)\neq 0$. Luego, por la definición de derivada, se tiene:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$

en donde, de acuerdo con la definición de límite,

$$\left|\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}-f'(x)\right|<\varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0<|\Delta x|<\delta$$

donde, como se recordará, ε y δ, relacionadas entre sí, son positivas y tan pequeñas como se desee.
Si se tiene presente el concepto de límite, se entiende que si el incremento $"\Delta x"$ es menor que $"\delta"$, esto hace pensar en un valor muy pequeño y entonces la diferencia

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}-f'(x)$$

resulta también una cantidad muy reducida. Luego puede escribirse que:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}-f'(x)=\eta \quad \text{donde} \quad |\eta|<\varepsilon$$

De esta expresión se obtiene:

$$\Delta f(x)=f'(x)\Delta x+\eta\,\Delta x \quad \cdots \quad (1)$$

donde $\eta\to 0$ cuando $\Delta x\to 0$**.**

Como se observa, la expresión (1) define el incremento de la función y consta de dos sumandos: el primero, esto es, $f'(x)\Delta x$, se conoce como la parte principal del incremento de la función y representa una buena aproximación de su valor, ya que el otro sumando, es decir, $\eta\,\Delta x$, es una cantidad muy pequeña siempre y cuando se tengan valores reducidos del incremento Δx de la variable independiente $"x"$.

Como $\eta \to 0$ cuando $\Delta x \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \eta = 0$**.**

Entonces, una función $y = f(x)$ **es diferenciable para un valor de** $"x"$**, si para un incremento** $"\Delta x"$**, el incremento** $\Delta f(x)$ **de la función puede escribirse en la forma indicada en la expresión** (1)**, es decir:**

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \eta\,\Delta x$$

La existencia de la derivada es condición necesaria y suficiente para que una función sea diferenciable.

Definición. Se llama diferencial de una función $"f"$ **en un punto** $"x"$ **a la parte principal del incremento de la función diferenciable y se denota con** $"dy"$**. De donde:**

$$dy = df(x) = f'(x)\Delta x \quad \cdots \quad (2)$$

Ejemplo. Investigar si las siguientes funciones son diferenciables, decir para qué valores de $"x"$ **y obtener sus diferenciales:**

$i)\quad f(x) = 2x^2 - 5x + 6 \qquad ; \qquad ii)\quad f(x) = +\sqrt{x^2 - 1}$

DIFERENCIAL DE LA FUNCIÓN IDENTIDAD

De acuerdo con la definición de la diferencial, para la función identidad se tiene:

$$dy = f'(x)\Delta x \quad ; \quad \begin{array}{c} y = f(x) = x \\ \dfrac{dy}{dx} = f'(x) = 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad dy = 1\cdot \Delta x \quad \therefore \quad dy = \Delta x$$

Como $y = x \quad \Leftrightarrow \quad dy = dx$**; entonces** $dx = \Delta x$

Definición. La diferencial de una función el producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente:

$$dy = \frac{dy}{dx}dx = f'(x)\,dx$$

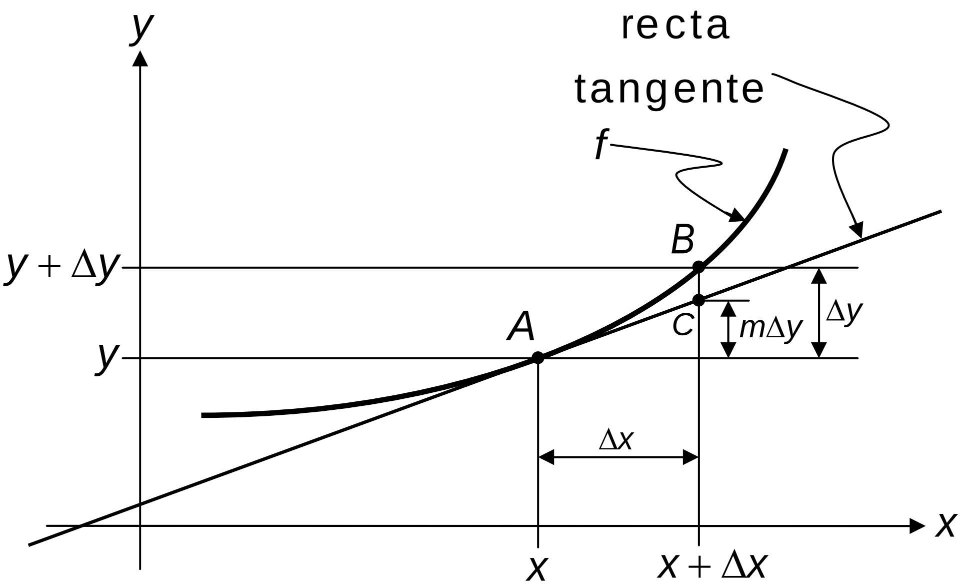
Ejemplo. Obtener la diferencial de las siguientes funciones:

$$i) \quad y = 2x^3 - 3x^2 + x - 7 \quad ; \quad ii) \quad f(x) = \tan\sqrt[3]{1-x}$$

$$iii) \quad y = ang\sec\sqrt{x}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DIFERENCIAL

Sea la función "f" que experimenta un incremento en sus variables dependiente e independiente:



Las coordenadas del punto C, de la recta que es tangente a la curva en el punto A, son $C\left(x+\Delta x, y+m\Delta y\right)$ y la pendiente de esta recta, es $f'(x)$. Luego, la ecuación "punto-pendiente" de la recta tangente se puede expresar como:

$$y-\left(y+m\Delta y\right)=f'(x)\left[x-\left(x+\Delta x\right)\right]$$

de donde,

$$y-y-m\Delta y=f'(x)(x-x-\Delta x)\quad\Rightarrow\quad -m\Delta y=-f'(x)\Delta x$$
$$\therefore\quad m\Delta y=f'(x)\Delta x$$

Como se sabe, $dy=f'(x)\Delta x$ es la diferencial de la función, luego esta equivale geométricamente a la mayor de las dos partes del incremento Δy que divide la recta tangente. Mientras menor sea el incremento Δx, mayor será la aproximación de la diferencial "dy" al incremento Δy de la función.

Estas dos partes en las que se divide el incremento Δy se manifiestan también en la expresión a la que se llegó al estudiar este incremento, es decir,

$$\Delta f(x)=f'(x)\Delta x+\eta\,\Delta x$$

en la que también se ve que mientras más pequeño es el incremento Δx, más se aproxima el producto $f'(x)\Delta x$, que es la diferencial, al incremento de la función Δy.

LA DERIVADA COMO COCIENTE DE DIFERENCIALES

La diferencial de una función $y=f(x)$ está dada por la expresión $dy=f'(x)\Delta x$ o bien $dy=f'(x)dx$. Si se dividen ambos miembros de la última expresión entre "dx" se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

Se concluye que la derivada se puede expresar como el cociente de la diferencial de la variable dependiente entre la diferencial de la variable independiente.

PERMANENCIA DE LA FORMA DE LA DIFERENCIAL PARA UNA FUNCIÓN DE FUNCIÓN

Considérese la función $y=f(u)$ donde $u=g(x)$. La composición de estas funciones da lugar a la función de función:

$$y=f(g(x))$$

cuya derivada se obtiene al aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Por la definición de diferencial de una función se tiene que:

$$y=f(u) \quad \Rightarrow \quad dy=f'(u)\,du \quad ; \quad u=g(x) \quad \Rightarrow \quad du=g'(x)\,dx$$

De donde se obtiene:

$$dy=f'(u)\,g'(x)\,dx$$

que equivale a:

$$dy=\left(\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\right)dx$$

expresión que justifica la permanencia de la forma de la diferencial para una función de función.

DIFERENCIALES SUCESIVAS

Dado que la diferencial de una función es el producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente, es posible pensar en diferenciales de órdenes superiores:

$$dy=f'(x)\,dx \quad ; \quad d^2y=f''(x)\,dx^2 \quad ; \quad d^3y=f'''(x)\,dx^3$$

$$\ldots d^{(n)}y=f^{(n)}(x)\,dx^{(n)}$$

Ejemplo. Calcular las diferenciales de primero, segundo y tercer orden para la función:

$$f(x)=2x^3+\cos x^2$$

ERRORES, VALORES APROXIMADOS Y APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

Una función es diferenciable si su incremento se puede expresar como $\Delta y = f'(x)\Delta x + \eta \Delta x$. Y a la diferencial de la función se define como $dy = f'(x)\Delta x$. Al restar estas dos ecuaciones, miembro a miembro, se llega a $\Delta y - dy = \eta \Delta x$. Se observa que mientras más pequeño sea Δx, menor es la diferencia entre Δy y dy, por lo que más se aproxima el valor de la diferencial al valor del incremento de la función. En ocasiones es preferible y más sencillo calcular la diferencial como un valor aproximado del incremento.

A la diferencia, en valor absoluto, entre el incremento y la diferencial, se le denomina Error absoluto y se designa con:

$$\varepsilon_A = \left|\Delta y - dy\right| = \left|\eta \Delta x\right|$$

Se conoce como Error relativo al cociente entre el error absoluto y el incremento de la función, esto es,

$$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon_A}{\Delta y}$$

Y el porcentaje del error que se comete al utilizar a la diferencial en lugar del incremento de la función es:

$$P_\varepsilon = \varepsilon_R \times 100 = \frac{\varepsilon_A}{\Delta y} \times 100$$

Si al calcular el valor de una función $y = f(x)$, se tiene un error dx en la medida de "x", esto producirá un error aproximado dy en el valor funcional de "y". El valor del error relativo en este caso es:

$$\varepsilon_R = \frac{dy}{y}$$

Y el porcentaje de error:

$$P_\varepsilon = \frac{dy}{y} \times 100$$

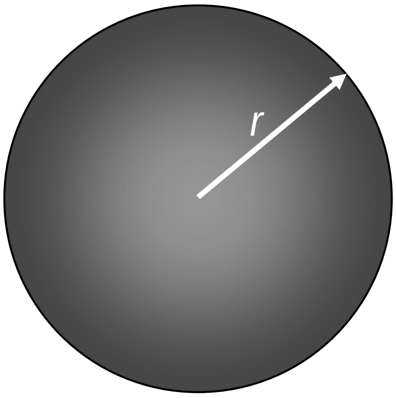
$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Dada la función $f(x)=\sqrt{5+x}$**, determinar el incremento** Δy **y la diferencial** dy **para** $x=23$ **y** $\Delta x=3$**. Calcular también los errores absoluto y relativo, así como el porcentaje del error al utilizar a la diferencial en lugar del valor exacto del incremento de la función.**

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Por medio de diferenciales, obtener un valor aproximado de $\sqrt{27}$**.**

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Por medio de diferenciales obtener el valor aproximado de $\tan 44^{\circ}$**.**

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. A una cúpula semiesférica con radio exterior de $5\ m$**, se le aplica un impermeabilizante especial que tiene un espesor de** $1cm$**. ¿Cuánto se gasta de manera aproximada (mediante diferenciales) en impermeabilizante si el litro cuesta** $\$100.00$**? Calcular también la cantidad exacta que se invierte, así como el porcentaje de error que se comete al utilizar la diferencial en lugar del valor exacto.**

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. **Las fórmulas para el área y el volumen de una esfera son, respectivamente:**



$$A = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Al medir el radio se obtiene que: $r = 3\ m$**:**

i) **¿Cuáles son los errores máximos aproximados de** A **y** V **si al medir el radio su medida puede variar** $1cm$**?**

ii) **¿Cuál es en cada caso el porcentaje de error?**

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. **En un laboratorio de materiales se trabaja con sólidos metálicos en forma de cubos. Si uno de éstos, que tiene** $10\ cm$ **de arista, se somete a una determinada temperatura, se dilata aumentando su arista** $2\ mm$ **, ¿cuáles serán los incrementos exacto y aproximado en su volumen y qué porcentaje de error se comete al utilizar la diferencial en lugar del incremento exacto?**

Ejemplo. Unos cilindros circulares rectos, utilizados en un laboratorio, tienen $20\ cm$ de longitud, un diámetro interior de $10\ cm$ y un diámetro exterior de $10.4\ cm$. Por medio de la diferencial, calcular el costo de cada cilindro, si el material del cual están hechos cuesta $\$5.00/cm^3$.

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. **Un cubo de madera tiene $12\ cm$ de arista. Si se rebaja cada una de sus caras $2\ mm$:**

i) **¿Cuánto pierde exactamente su volumen?**

ii) **¿Cuánto pierde aproximadamente?**

iii) **¿Cuál es el porcentaje de error que se comete al utilizar la diferencial en lugar del valor exacto al calcular su volumen?**

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. **El radio de un disco circular es de $24\ cm$ con un error máximo en su medición de $0.2\ cm$. Utilizar la diferencial para estimar el porcentaje de error máximo en el cálculo del área del disco.**

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. En la orilla de la parte superior de un edificio hay una lámpara que proyecta la sombra de un poste de $3.2\ m$ **que se encuentra a** $11.75\ m$ **de la base del edificio. Si la sombra del poste es de** $90\ cm$ **con un posible error de** $1\,cm$ **en su medición, ¿cuál es la altura aproximada del edificio y cuál el porcentaje de error en su cálculo?**