Capítulo II Límites y Continuidad

INTRODUCCIÓN

El concepto de límite, después del de función, es el fundamento matemático más importante que ha cimentado los estudios y solución de problemas que se presentan, a través de la utilización de la ciencia matemática como herramienta del ingenio humano. Este concepto, junto con el de continuidad, conforman una pareja indisoluble, tal que para que ésta exista, debe existir aquél.

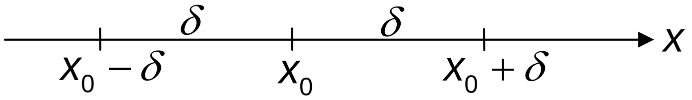
ENTORNO O VECINDAD

Definición. Sea un punto x_0 en el eje $"x"$. Una vecindad o entorno de x_0 es el conjunto de puntos del eje $"x"$ que satisfacen la desigualdad:

$$x_0-\delta<x<x_0+\delta$$

donde a $"\delta"$ se le conoce como la semiamplitud o radio de la vecindad. A esta vecindad se le acostumbra denotar como $v(x_0,\delta)$. Cabe hacer notar, como lo indica la desigualdad antes señalada, que una vecindad es un intervalo abierto.

Gráficamente, esto puede expresarse como sigue:



Se puede escribir en términos de valor absoluto como:

$$x_0-\delta<x<x_0+\delta$$

$$-\delta<x-x_0<\delta$$

$$\left|x-x_0\right|<\delta$$

Si a la desigualdad anterior se le añade la condición adicional de que el valor absoluto sea estrictamente mayor que cero, se tiene:

$$0 < \left| x - x_0 \right| < \delta$$

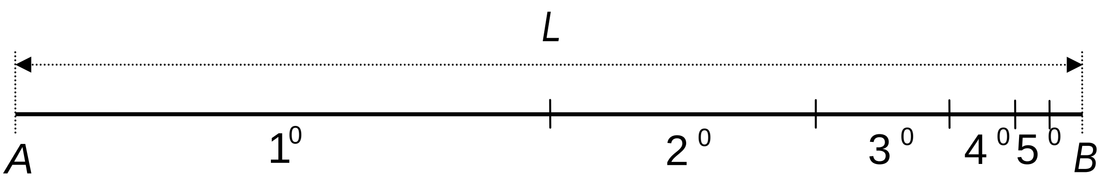
Se excluye a x_0 **de su propio entorno o vecindad, llamándole entonces a éste o ésta, "entorno reducido" o "vecindad agujerada".**

EJEMPLOS

Simbólicamente, si al ser humano se le denota con $"H"$**, con** $"n"$ **al número de actos de humanidad y con** $"P"$ **a la perfección, entonces se puede escribir que:**

$$\lim_{n \to \infty} H = P$$

Analogía de una célebre paradoja del famoso científico griego Zenón de Elea: A un ingeniero se le pide que realice un levantamiento geológico de un camino recto de longitud $"L"$**, que unirá dos puntos** $A \; y \; B$**. Este individuo se traza como plan de trabajo el siguiente: *"cada día estudiaré la mitad de lo que me falte"*.**

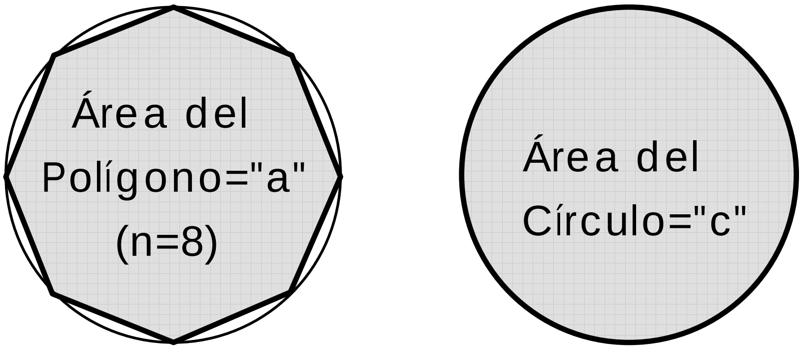


$$\frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{8} + \frac{L}{16} + \frac{L}{32}$$

$$\lim_{n \to \infty} S = L$$

Considérese un polígono regular con $"n"$ **lados y cuya área es** $"a"$**. Dicho polígono está inscrito en un círculo cuya área es** $"c"$**.**

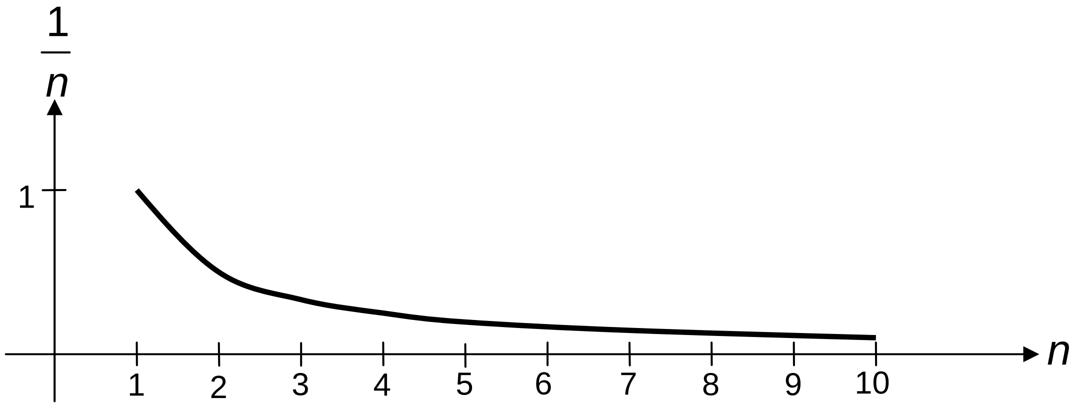
$$\lim_{n \to \infty} a = c$$



Considérese el cociente $\frac{1}{n}$ y véase qué sucede si se hace crecer indefinidamente el valor $"n"$ partiendo del valor "uno".

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{1}{n}$	1	0.5	0.33	0.25	0.2	0.17	0.14	0.13	0.11	0.1

Se construye una gráfica con estos valores y se tiene:



Si se hace $n = x \quad y \quad \frac{1}{n} = y$**, entonces se tiene que:**

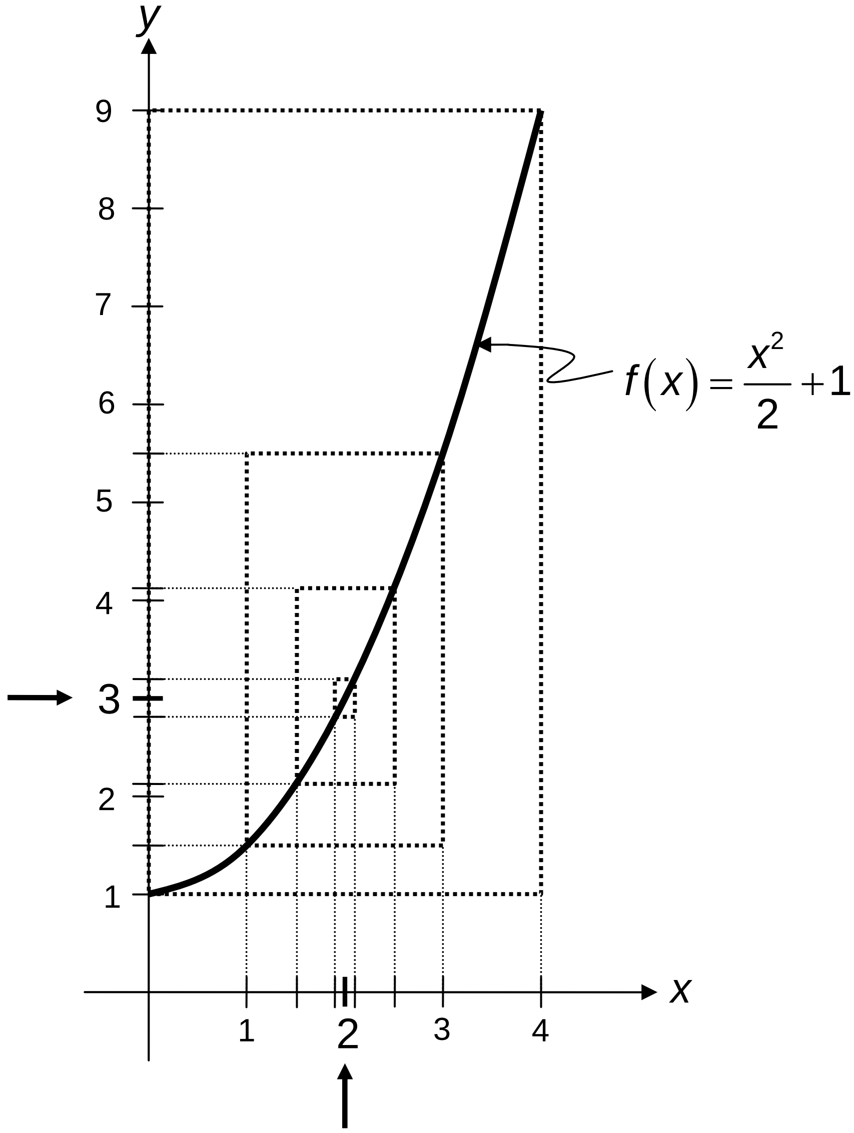
$$y = \frac{1}{x} \quad ; \quad x \in [1, \infty)$$

que representa una porción de la hipérbola equilátera ya tratada en el primer tema. Así, se puede escribir que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ejemplo con una función en la que la variable independiente tiende a un valor finito:

Sea la función $y = f(x) = \dfrac{x^2}{2} + 1$ **definida en el intervalo** $x \in [0,4]$ **y supóngase que se desea conocer el límite de la función cuando la variable** "x" **tiende al valor** "2"**. La gráfica de la función en el intervalo considerado se tiene en la siguiente figura, en la cual se observa que cuando la variable** "x" **se aproxima al valor** "2"**, la variable** "y" **se aproxima al valor** "3"**. A continuación se analizará esta situación con más detenimiento, tomado como base la gráfica considerada.**



$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) = 3$$

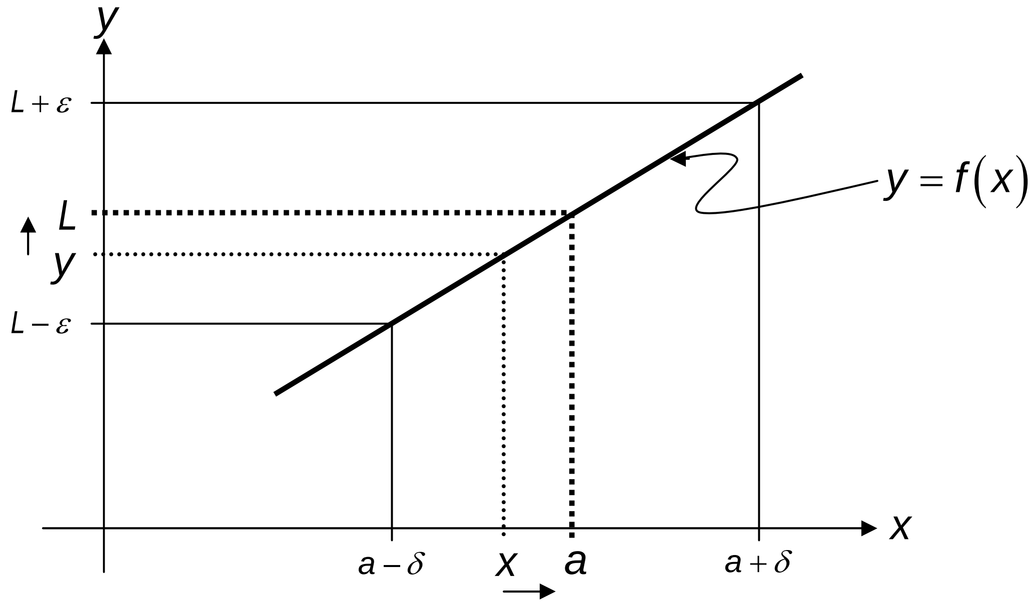
DEFINICIÓN. Una función f tiene límite L cuando la variable independiente $x \in D_f$ tiende a un valor "a" y se escribe como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si la función está en el interior de una vecindad de L con radio $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se desee, siempre que x pertenezca a una vecindad de "a" con radio $\delta > 0$, siendo δ función de ε. Esto se expresa, analíticamente, como:

$$\left| f(x) - L \right| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < \left| x - a \right| < \delta$$

Si en la definición que se dio se aumenta considerablemente la escala alrededor de los valores "a" y "L", considerando una porción muy reducida de la gráfica de la función f, hasta poder asumirla como un pedazo de recta, se podría pensar en la siguiente representación gráfica para la definición anterior, figura en la que se ven con claridad las vecindades en torno a los valores de $x = a$ y $y = L$ que es el valor del límite de la función.



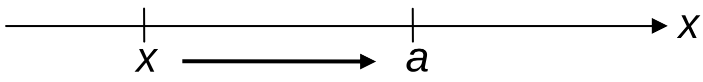
LÍMITES LATERALES

Definición. Considérese el límite siguiente para una cierta función f y un determinado valor "a":

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

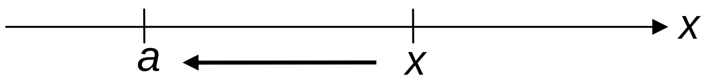
Cuando la variable $"x"$ tiende al valor $"a"$ por la izquierda, se dice que la función tiene "límite por la izquierda" si su valor existe y se denota con:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_I$$



Cuando la variable $"x"$ tiende al valor $"a"$ por la derecha, se dice que la función tiene "límite por la derecha" si su valor existe y se denota con:

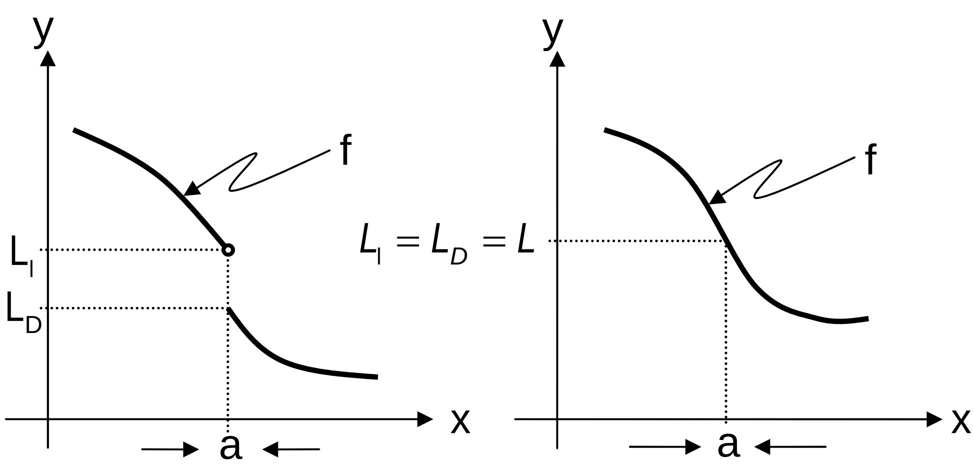
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_D$$



Es evidente la tesis del siguiente teorema.

Teorema. Si una función f tiene límite L cuando la variable independiente $"x"$ tiende a un cierto valor $"a"$, entonces sus límites laterales son iguales y su valor es L. Esto es,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$$



"el límite no existe"

"el límite sí existe"

EXISTENCIA DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

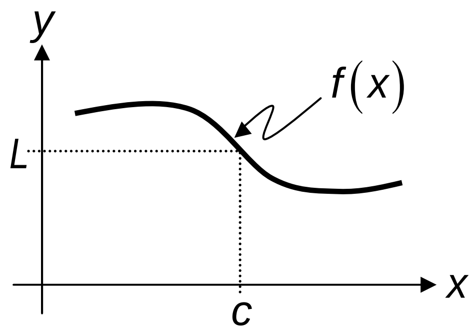
Ahora se analizarán brevemente los diferentes casos que se presentan en la existencia y la no existencia del límite de una función.

Primer Caso

Sea f **una función definida en un intervalo** $\left[a,b\right]$ **y sea** $c\in\left[a,b\right]$**. Entonces, como ya se trató**

$$\lim_{x\to c} f\left(x\right)=L$$

si $L\in\mathbb{R}$ **y** $\lim_{x\to c^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to c^+} f\left(x\right)$



En este caso el límite existe y su valor es L**. Se observa claramente cómo se podría definir un** $\varepsilon>0$ **tan pequeño como se desee, tal que para un** $\delta>0$ **(función de** ε**), se cumple que:**

$$\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0<\left|x-c\right|<\delta$$

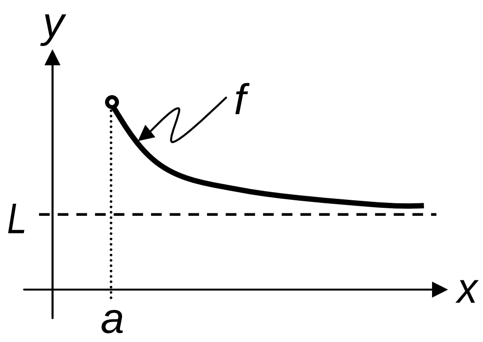
Segundo caso

Sea f **una función definida en el intervalo** $\left(0,\infty\right)$**. Entonces se define el límite**

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=L$$

si para toda $\varepsilon>0$ **y tan pequeña como se desee, existe un número** $"n"$ **(función de** ε **y de** f**), tal que:**

$$\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad x>n$$



Como se observa en la gráfica, $x \in D_f$ crece indefinidamente, de tal forma que se tenga una "vecindad" de $f(x) = L$ cuyo radio $\varepsilon > 0$ sea tan pequeño como se desee. En este caso no es posible construir una vecindad horizontal y sin embargo el límite existe y su valor es $"L"$. Del mismo modo se puede definir el límite

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Nótese que la recta $y = L$ es una asíntota horizontal.

Tercer caso

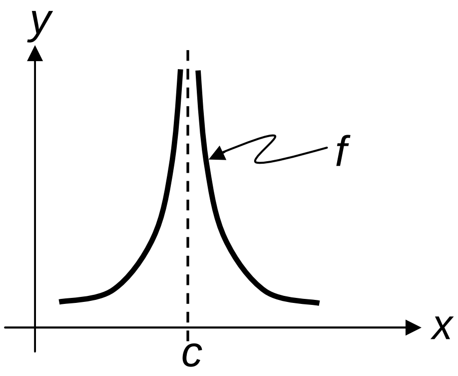
Sea f una función definida en un intervalo $[a, b]$ y sea $c \in [a, b]$. Entonces se dice que el límite de f no existe o que tiende a infinito, lo cual se escribe como:

$$\lim_{x \to c} f(x) \to +\infty$$

si para todo número $"m"$ tan grande como se desee, existe un valor $\delta > 0$ (que depende de m y de f) tal que:

$$f(x) > m \qquad \text{siempre que} \qquad |x - c| < \delta$$

Aquí se observa que al tender x a $"c"$, el valor de la función crece indefinidamente.



De la misma manera se puede definir el límite

$$\lim_{x \to c} f(x) \to -\infty$$

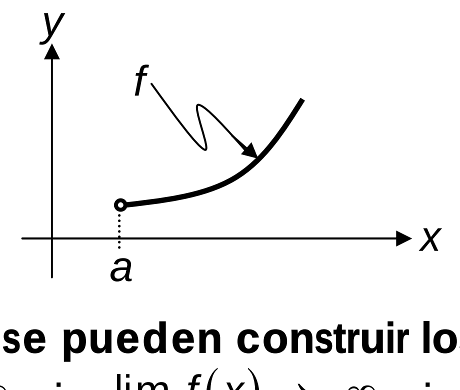
que, como el anterior, no existe o tiende a infinito. Aquí la recta $x = c$ es una asíntota vertical.

Cuarto caso

Sea f una función definida en el intervalo abierto (a, ∞). Entonces se dice que el límite de f no existe o que tiende a infinito, lo cual se escribe como:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \to +\infty$$

si al crecer $x \in D_f$ indefinidamente, la función también crece de manera indefinida.



De la misma forma se pueden construir los límites:

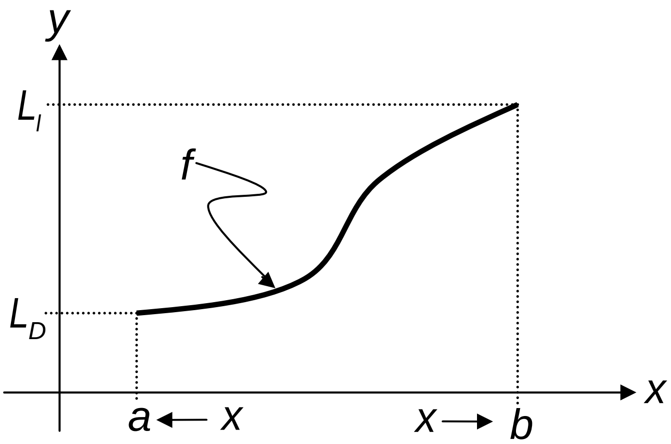
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \to +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) \to -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) \to -\infty$$

En cualquiera de estos casos se dice también que el límite no existe.

Quinto caso

Sea f una función definida en un intervalo cerrado $\left[a,b\right]$. Entonces se pueden definir los límites en los extremos del intervalo, es decir, por la derecha de "a" y por la izquierda de "b", siempre que estos límites existan. Así, a través de los límites laterales, se puede plantear la existencia de los siguientes límites:

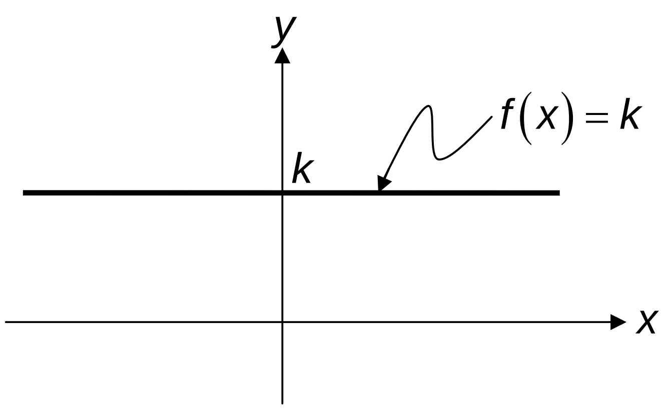
$$\lim_{x\to a^{+}} f(x) = L_D \quad y \quad \lim_{x\to a^{-}} f(x) = L_I$$



Para demostrar formalmente la existencia del límite de una función en un punto habría que obtener para qué valores de "δ" y "ε" se cumple la definición, pero esto se sale de los objetivos de este tema. Sin embargo, se ilustrará esto para las funciones constante e identidad.

LÍMITE DE LA FUNCIÓN CONSTANTE

Como ya se vio en el Capítulo I, la función constante y su gráfica son:



Teorema. Sea f una función constante dada por $y=f(x)=k$. Entonces el límite de esta función, cuando la variable "x" tiende a cualquier número, es igual a la constante, lo que se expresa como:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} k=k$$

Prueba. Para demostrar esto se considerará la definición de límite ya vista, es decir, que basta que exista un $\delta>0$, tal que para un $\varepsilon>0$ dado, se cumple que:

$$\left|f(x)-k\right|=\left|k-k\right|=0<\varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0<\left|x-a\right|<\delta$$

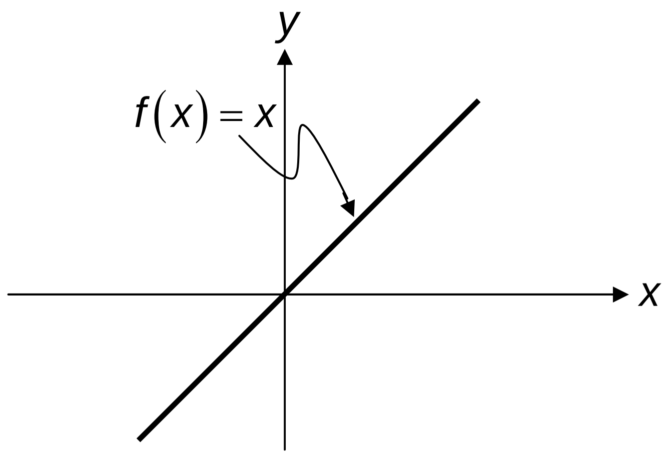
Para cualquier $\delta>0$ seleccionado, siempre se cumplirá que:

$$\left|f(x)-k\right|<\varepsilon$$

siendo $\varepsilon>0$ y tan pequeño como se desee.

LÍMITE DE LA FUNCIÓN IDENTIDAD

Como ya se vio también, esta función y su gráfica son:



Teorema. Sea f la función identidad definida como $y=f(x)=x$. Entonces el límite de esta función, cuando "x" tiende a un número cualquiera "a", es igual al mismo número "a" y se expresa como:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} x=a$$

Prueba. Se debe encontrar un número $\delta > 0$ para cada $\varepsilon > 0$, tal que:

$$\left| f(x) - a \right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < \left| x - a \right| < \delta$$

Como $f(x) = x$, se tiene que: $\left| x - a \right| < \varepsilon = \delta$

Por esto, para cualquier $\varepsilon > 0$ dado, siempre existe un número $\delta = \varepsilon > 0$ que cumple las condiciones establecidas, es decir, que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a$$

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

En esta parte se enunciarán algunas de las propiedades más importantes de los límites. Cabe aclarar que todas constituyen teoremas, pero en estos apuntes se omiten sus demostraciones.

Unicidad

El límite de una función f cuando x tiende a un valor $"a"$, si existe, es único.

Teorema (del emparedado). Sean las funciones $f_1(x)\,;\, f_2(x)\,;\, f_3(x)$ tales que $f_1(x) \le f_2(x) \le f_3(x)$ y considérese que para un cierto entorno del punto $x = a$ se cumple que:

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = L = \lim_{x \to a} f_3(x)$$

Entonces el límite de la función f_2 existe y es igual a $"L"$, es decir,

$$\lim_{x \to a} f_2(x) = L$$

Teorema. Límite de una suma de funciones.
Sean las funciones $f_1(x)\,;\, f_2(x)\,;\ldots;\, f_n(x)$ y sean sus límites cuando $"x"$ tiene a un valor $"a"$:

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1 \quad ; \quad \lim_{x\to a} f_2(x) = L_2 \quad ; \quad \dots \quad ; \quad \lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$$

Entonces el límite de la suma de las $"n"$ **funciones es igual a la suma de los límites de las funciones. Esto es,**

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)\right] = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

(si los límites existen)

Es importante aclarar que se trata de una suma algebraica.

Teorema. Límite de un producto de funciones.

Sean las funciones $f_1(x); f_2(x); \dots; f_n(x)$ **y sean sus límites cuando** $"x"$ **tiene a un valor** $"a"$**:**

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1 \quad ; \quad \lim_{x\to a} f_2(x) = L_2 \quad ; \quad \dots \quad ; \quad \lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$$

Entonces el límite del producto de las $"n"$ **funciones es igual al producto de los límites de las funciones. Esto es,**

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)\right] = L_1 \cdot L_2 \cdot \dots \cdot L_n$$

(si los límites existen)

Como un caso particular, el límite del producto de la función constante por otra función cualquiera es igual a la constante multiplicada por el límite de la función cualquiera. Esto es:

$$\lim_{x\to a}\left[k\, f(x)\right] = k \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

Este resultado, en la práctica, lleva a la práctica de “sacar” del límite a la o las constantes.

Teorema. Límite del cociente de funciones.

Sean las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ **y sean sus límites cuando** $"x"$ **tiene a un valor** $"a"$**:**

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1 \quad y \quad \lim_{x\to a} f_2(x) = L_2$$

Entonces el límite del cociente de dichas funciones es igual al cociente de los límites de las funciones. Esto es,

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f_1(x)}{\lim_{x\to a} f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad ; \quad L_2 \neq 0$$

(si los límites existen)

Teorema. Límite de la potencia de una función

Sea la función f y sea $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Entonces el límite de la función elevada a una potencia entera positiva es igual al valor del límite de la función elevado a dicha potencia, es decir,

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \right]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x) \right]^n \quad ; \quad \text{n, entero positivo}$$

(si el límite de f existe)

Teorema. Límite de la raíz de una función

Sea la función f y sea $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Entonces el límite de la raíz enésima entera positiva de la función es igual a la raíz enésima del límite de la función, es decir,

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} \quad ; \quad \text{n, entero positivo}$$

(si el límite de f existe)

CÁLCULO DE LÍMITES

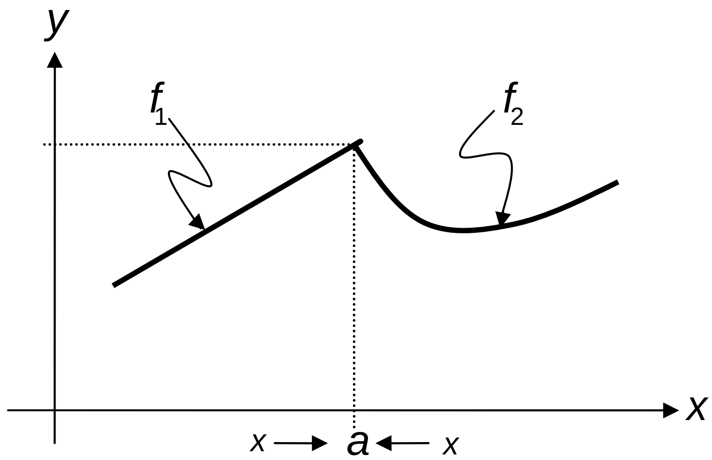
De acuerdo con lo tratado y en concordancia con las propiedades vistas, si se tiene una función f que no presenta “saltos” o rompimientos bruscos en $x = a$, valor que pertenece a su dominio, bastará con sustituir dicho valor en la función para determinar el valor numérico del límite

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Y si la variable tiende a infinito, aquí se verá una forma para saber si existe o no el límite y, en caso de existir, de cómo calcularlo.

Cuando se pretende obtener el límite en un punto extremo (frontera) del dominio, entonces su valor, si existe, estará dado por el correspondiente límite lateral.

Por otro lado, si la función está definida por más de una regla de correspondencia, entonces el análisis de los límites laterales donde se "unen" las gráficas de las reglas de correspondencia, se determinará con los límites laterales, como se ilustra en la siguiente figura:



$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f_1(x) = \lim_{x\to a^+} f_2(x) = L}$$

Formas determinadas e indeterminadas

Al efectuar la sustitución de x por el valor al que tiende, en la búsqueda del valor numérico del límite de una función f, se pueden presentar dos casos, dependiendo si la expresión resultante es determinada o no. En el caso de que el resultado esté determinado, esto significa que se llega al valor numérico del límite o bien a la certeza de que no existe; pero si se presenta una forma indeterminada, como alguna de las siguientes:

$$\frac{0}{0}\ ,\ \frac{\infty}{\infty}\ ,\ 0\cdot\infty\ ,\ \infty-\infty\ ,\ 0^0\ ,\ \infty^0\ ,\ 1^\infty$$

habrá que recurrir a diversos operaciones algebraicos para quitar la indeterminación y averiguar si existe el límite y cuál es su valor.

Ejemplo. Calcular el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to-\frac{2}{3}} \frac{9x^2-6x+2}{1-3x+18x^2}$$

$\boxed{\textbf{Ejemplo}}$. **Obtener el valor del siguiente límite:**

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2+2x-6}{x^2-3x-10}$$

$\boxed{\textbf{Ejemplo}}$. **Calcular, si existe, el valor del límite:**

$$\lim_{x\to -3}\frac{18-2x^2}{x^2-2x-10}$$

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Calcular:

$$\lim_{x \to 5} \frac{125 - x^3}{3x^2 - 13x - 10}$$

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Obtener el valor numérico del siguiente límite:

$$\lim_{x \to -3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{12 + x} - 3}$$

Ejemplo. Obtener:

$$\lim_{x \to 5} \frac{1 - \sqrt{6 - x}}{\sqrt{x + 20} - 5}$$

Ejemplo. Calcular el límite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{10 - x} - 2}{2 - x}$$

$\boxed{\textbf{Ejemplo}}$. **Calcular el valor numérico del siguiente límite:**

$$\lim_{x \to 6} \frac{\sqrt[4]{22 - x} - 2}{4 - \sqrt{22 - x}}$$

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Determinar el valor numérico de:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+13}-4}{5-\sqrt[3]{x+122}}$$

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Calcular:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^3+6x^2+2}{1+x+15x^2+2x^3}$$

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Obtener el valor del límite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{5x^6 - 21}}{4 - 3x^3}$$

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Calcular:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{27x^3 + 9}}{15x - 7}$$

Ejemplo. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 4^-} \left[2 + \sqrt{4x - x^2} \right]$$

y decir si existe una razón del por qué se pida calcular el límite lateral por la izquierda.

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Calcular el valor del límite, si existe, de la siguiente función, cuando la variable independiente tiende a los valores "-2" **y** "0"**. Apoyarse en la gráfica de la función.**

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & si \quad -5\le x<-2 \\ \sqrt{4-x^2} & si \quad -2<x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{2}+1 & si \quad 0<x\le 3 \end{cases}$$