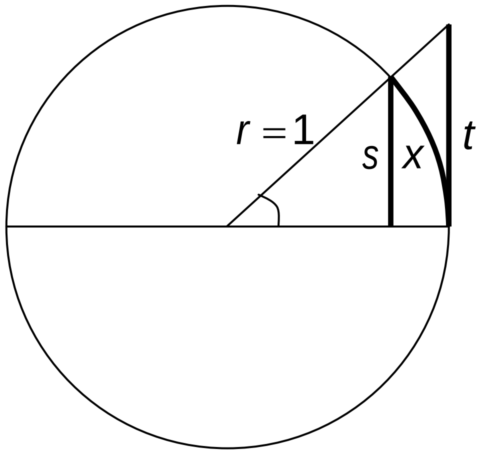
LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para resolver límites que involucran funciones circulares directas, resulta conveniente conocer los límites de las siguientes funciones:

$$\lim_{x\to 0} sen x = 0 \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

Ahora considérese el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen x}{x}$$



$$sen x < x < \tan x$$

$$\frac{sen x}{sen x} < \frac{x}{sen x} < \frac{\frac{sen x}{\cos x}}{sen x} \qquad \Rightarrow \qquad 1 < \frac{x}{sen x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$1 > \frac{sen x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x\to 0}(1) = 1 = \lim_{x\to 0} \cos x$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} \frac{sen x}{x} = 1$$

Con los tres límites, esto es:

$$\lim_{x\to 0} sen x = 0 \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{sen x}{x} = 1$$

es posible resolver muchos límites de funciones trigonométricas.

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Calcular el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{5x}$$

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen^2 x}{x}$$

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Obtener el valor numérico del siguiente límite:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{senx-\cos x}$$

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{2sen^2 x}{x^2\sec x}$$

$\boxed{\textbf{Ejemplo}}$. **Determinar el valor de:**

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen2x}{sen3x}$$

$\boxed{\textbf{Ejemplo}}$. **Resolver el límite siguiente:**

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$\boxed{\textbf{Ejemplo}}$. **Calcular el valor del siguiente límite:**

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1 - x}$$

OTROS LÍMITES

Un límite de gran importancia en matemáticas es aquel cuyo valor es el "famoso" número $"e"$ **y que se presentará después de recordar el desarrollo del binomio de Newton para el siguiente binomio, considerando a** $"x"$ **como un valor real:**

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1^x + \frac{x}{1!}1^{x-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x(x-1)}{2!}1^{x-2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}1^{x-3}\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \cdots$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x-1}{x}\right)+\frac{1}{3!}\left(\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{x-2}{x}\right)+\cdots$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)+\cdots$$

Ejemplo. Calcular el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

Ejemplo. Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

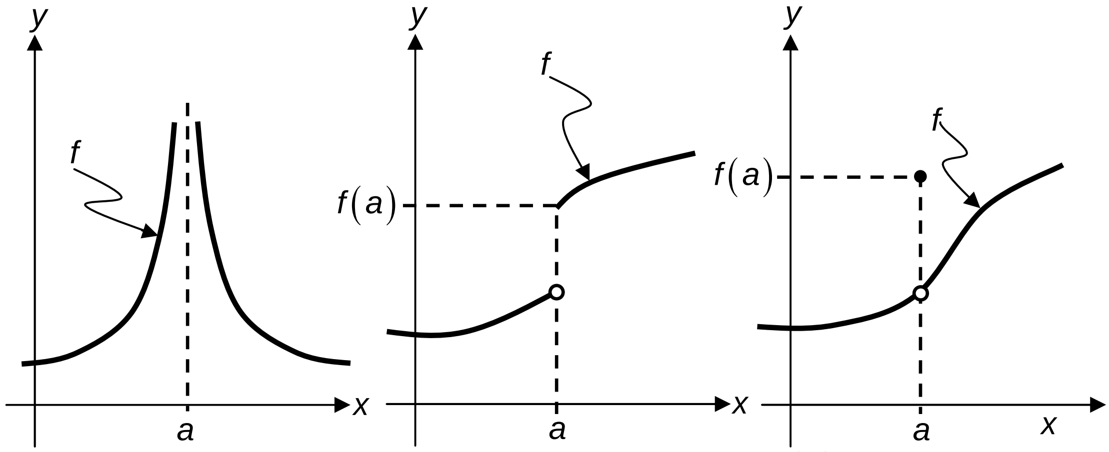
Ejemplo. **Resolver el límite:**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$$

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Definición. Una función es continua si al dibujar su gráfica no hay necesidad de despegar del papel la punta del lápiz.

Considérense las gráficas de las funciones de la siguiente figura:



$f(a)$ no existe

$f(x)$ no es cont en $x=a$

$f(a)$ existe

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe

$f(x)$ no es cont en $x=a$

$f(a)$ existe

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe

$f(a)\neq \lim\limits_{x\to a} f(x)$

$f(x)$ no es cont en $x=a$

Definición. Una función f es continua en $x=a$ sí y solo si se cumplen las condiciones siguientes:

i) Que $f(a)$ exista

ii) Que $\lim_{x\to a} f(x)$ exista

iii) Que $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$

Como se vio en la figura y en la definición, de no cumplirse una de las condiciones dadas, la función no es continua en $x=a$.

Continuidad en un intervalo

Definición. Una función f es continua en un intervalo cerrado $\left[a,b\right]$ si cumplen las siguientes condiciones:

a) **Que f sea continua en todos los puntos del intervalo abierto (a,b).**

b) **Que f sea continua por la derecha de "a", lo que implica el cumplimiento de las siguientes condiciones:**

i) Que $f(a)$ exista

ii) Que $\lim_{x\to a^+} f(x)$ exista

iii) Que $f(a)=\lim_{x\to a^+} f(x)$

c) **Que f sea continua por la izquierda de "b", lo que implica el cumplimiento de las siguientes condiciones:**

i) Que $f(b)$ exista

ii) Que $\lim_{x\to b^-} f(x)$ exista

iii) Que $f(b)=\lim_{x\to b^-} f(x)$

Ahora se enunciarán algunos teoremas que son de gran ayuda al estudiar la continuidad de una función, ya sea en un punto o en un intervalo.

Teoremas sobre continuidad

i) **La suma, resta, producto y cociente de dos funciones que son continuas en un punto, también son funciones continuas en dicho punto (con tal de que la función del divisor no se anule en el punto).**

ii) **Toda función polinomial es continua en su dominio, esto es, para todo valor real de la variable independiente.**

iii) **Toda función algebraica o trascendente es continua en su dominio.**

A continuación se presentarán varios ejemplos que ilustran el concepto de continuidad en puntos e intervalos, así como una aplicación práctica.

Ejemplo. Analizar la continuidad en el punto correspondiente a $x=3$ **para la siguiente función y hacer un trazo aproximado de su gráfica:**

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si \quad -2<x<3 \\ \dfrac{4x-15}{3} & si \quad 3\le x\le 6 \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{Ejemplo}}$. **Estudiar la continuidad de la siguiente función en** $x=0$ **y trazar su gráfica:**

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & si \quad -\pi < x \le 0 \\ x^2+1 & si \quad 0 < x < 2\end{cases}$$

$\boxed{\textbf{Ejemplo}}$. **Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:**

$i)\quad f(x)=\dfrac{3sen^3x+\cos^2 x+1}{4\cos x-2}\qquad ; \qquad ii)\quad f(x)=\dfrac{x^3\cos x+x^2 senx}{\cos\left(\dfrac{1}{senx}\right)}$

Solución.

$i)\quad f(x)=\dfrac{3sen^3x+\cos^2 x+1}{4\cos x-2}$

Esta función es continua en su dominio, por lo que solo experimenta discontinuidades en los puntos donde el denominador se hace cero, esto es, en los puntos que son raíces de la ecuación:

$$4\cos x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

por lo que la función es continua en todos los valores reales con excepción de los puntos donde la variable independiente $"x"$ **es igual a:**

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \quad \left(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$$

$ii)\quad f\left(x\right) = \dfrac{x^3\cos x + x^2 sen x}{\cos\left(\dfrac{1}{sen x}\right)}$

Esta función es continua, al igual que la anterior, en su dominio, luego será continua en todos los reales excepto en los puntos donde el denominador se cancele, es decir, donde

$$\cos\left(\frac{1}{sen x}\right) = 0$$

y para ello, en primer término, para $x = k\pi \quad \left(k, \text{entero}\right)$**,** $sen x = 0$ **que llevaría a una división entre cero que no existe.**

Además, $\cos\left(\dfrac{1}{sen x}\right) = 0$ **en los puntos en que** $\dfrac{1}{sen x} = \left(2p+1\right)\dfrac{\pi}{2} \quad \left(p, \text{entero}\right)$**, o sea en** $sen x = \dfrac{2}{\left(2n+1\right)\pi}$**. Por lo tanto, la función es continua en todos los reales con excepción de los puntos donde:**

$$x = k\pi \quad y \quad x = \left(-1\right)^n angsen\frac{2}{\left(2p+1\right)\pi} + n\pi$$

$$\left(k, p, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$$

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Estudiar la continuidad de la siguiente función, tanto en puntos como en intervalos:

$$f(x)=\begin{cases} 3 & si \quad -5<x\le -2 \\ 3-\sqrt{4-x^2} & si \quad -2<x\le 0 \\ \cos x & si \quad 0<x\le \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{4x-10-\pi}{10-\pi} & si \quad \dfrac{\pi}{2}<x\le 5 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Determinar el valor de las constantes $"c"$ **y** $"k"$ **de tal forma que la función dada sea continua para todo valor real de** $"x"$**. Hacer un trazo aproximado de la gráfica de la función resultante.**

$$f(x)=\begin{cases} x & si \quad x\le 1 \\ cx+k & si \quad 1<x<4 \\ -2x & si \quad 4\le x \end{cases}$$

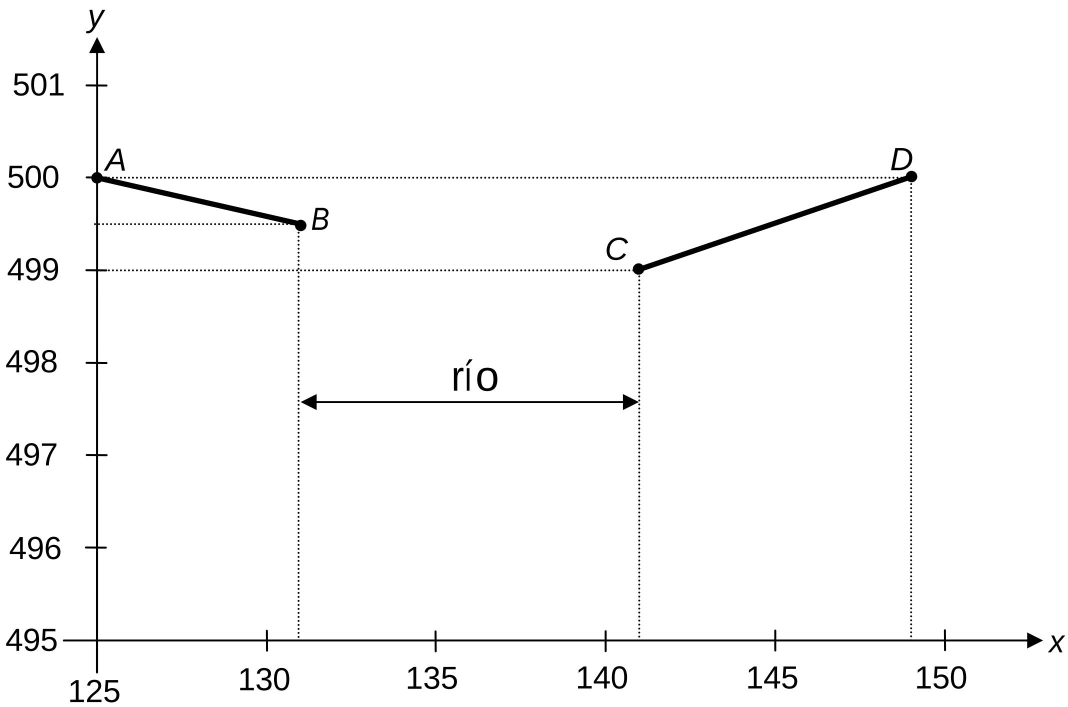
Ejemplo. Un ingeniero está trazando el perfil de un camino y hay un tramo de $24\ m$ **en línea recta, en el que deberán realizarse determinados trabajos por la presencia del cauce de un río cuyo ancho es de** $10\ m$**. Con respecto a un cierto sistema coordenado, este tramo de** $24\ m$ **se sitúa de acuerdo con los puntos**

$$A(125,500)\ ;\ B(131,499.5)\ ;\ C(141,499)\ ;\ D(149,500)$$

de tal manera que el cauce del río está entre las abscisas $131\ y\ 141$**. ¿Cómo representaría el ingeniero dicho tramo a partir de una función, qué diría de su continuidad y cómo removería la discontinuidad, lo que en realidad sería hecho con un puente para cruzar el río? ¿Cómo quedaría la función con la discontinuidad removida?**

Solución.

Lo primero que hace el ingeniero es una gráfica de la función, que representa el perfil del camino. Los tramos de A a B y de C a D **los toma como rectas por simplicidad. Así, la función y su gráfica serían:**



Con la ecuación de la recta apoyada en dos puntos, esto es,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right)$$

se obtienen las dos reglas de correspondencia correspondientes a los tramos de A **a** B **y de** C **a** D**. Luego el ingeniero puede escribir la función como sigue:**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6125-x}{12} & si \quad 125\le x\le 131\\[2ex] \dfrac{x+3851}{8} & si \quad 141\le x\le 149\end{cases}$$

Al analizar la continuidad, el ingeniero sabría que las dos reglas de correspondencia son rectas (funciones polinomiales), por lo que al ser continuas en los reales, lo son en sus respectivos intervalos. Además, sabe que la función, en cada intervalo, es continua, por la derecha de $125 \ \ y \ \ 141$ **y por la izquierda de** $131 \ \ y \ \ 149$**, lo que escribe como:**

Por la derecha de $x=125$

$i)\quad f(125)=500 \quad (\text{cumple})$

$ii)\quad \lim\limits_{x\to125^+} f(x)=500 \quad (\text{cumple})$

$iii)\quad f(125)=\lim\limits_{x\to125^+} f(x) \quad (\text{cumple})$

Por lo que $f(x)$ **es continua por la derecha de** $x=125$

Por la izquierda de $x=131$

$i)\quad f(131)=499.5 \quad (\text{cumple})$

$ii)\quad \lim\limits_{x\to131^-} f(x)=499.5 \quad (\text{cumple})$

$iii)\quad f(131)=\lim\limits_{x\to131^-} f(x) \quad (\text{cumple})$

Por lo que $f(x)$ **es continua por la izquierda de** $x=131$

Por la derecha de $x=141$

$i)\quad f(141)=499 \quad (\text{cumple})$

$ii)\quad \lim\limits_{x\to141^+} f(x)=499 \quad (\text{cumple})$

$iii)\quad f(141)=\lim\limits_{x\to141^+} f(x) \quad (\text{cumple})$

Por lo que $f(x)$ **es continua por la derecha de** $x=141$

Por la izquierda de $x=149$

$i)\quad f(149)=500 \quad (\text{cumple})$

$ii)\quad \lim_{x\to 149^-} f(x)=500 \quad (\text{cumple})$

$iii)\quad f(149)=\lim_{x\to 149^-} f(x) \quad (\text{cumple})$

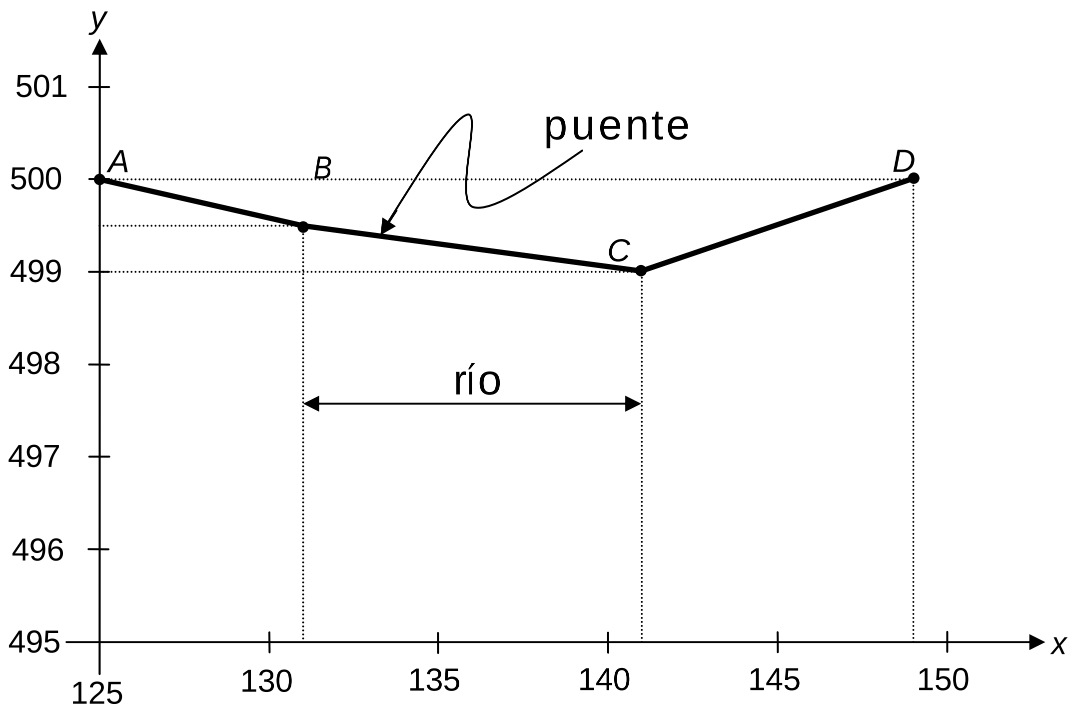
Por lo que $f(x)$ **es continua por la izquierda de** $x=149$

Al considerar el intervalo de $x=125$ **a** $x=149$**, concluye que la función** $f(x)$ **es continua en** $[125,131]$ y $[141,149]$ **y discontinua en** $(131,141)$**.**

Para remover la discontinuidad, le basta con agregar a la definición una regla de correspondencia que representa al eje del perfil del puente que tendría que construir para salvar el obstáculo representado en este caso por el río. Si el ingeniero coloca una recta en el intervalo de discontinuidad, que representaría el puente, entonces la función quedaría como:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{6125-x}{12} & si \quad 125\le x\le 131 \\ \dfrac{1021-x}{20} & si \quad 131< x< 141 \\ \dfrac{x+3851}{8} & si \quad 141\le x\le 149 \end{cases}$$

Y así la función del perfil del tramo de camino considerado es continua en el intervalo $[125,149]$**. Y la gráfica quedaría como:**



Forma alternativa para estudiar la continuidad

Definición. Si en una función la variable independiente $"x"$ **experimenta un cambio de** $"x_0"$ **a** $"x"$**, su incremento será**

$$\Delta x = x - x_0$$

Y como la variable dependiente $"y"$ **está en función de la variable independiente** $"x"$**, entonces, al experimentar esta un incremento, es evidente que** $"y"$ **tenga su correspondiente incremento, que se define como:**

$$\Delta y = f(x) - f(x_0)$$

y, como $x = x_0 + \Delta x$**, entonces**

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$\begin{matrix} x_1 & ; & y_1 = f(x_1) \\ x_2 & ; & y_2 = f(x_2) \end{matrix} \quad ; \quad \Delta y = y_2 - y_1$$

Considérense al respecto los siguientes ejemplos:

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. **Dada la siguiente función, obtener su incremento:**

$$y = 2x^3 - 5x^2 + x - 1$$

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. **Supóngase una esfera metálica de radio** $r = 25\ cm$**, la que, por efecto de variaciones de temperatura, aumenta su diámetro en** $0.002\ cm$**. ¿Cuál será la variación de su volumen y de su superficie?**

Teorema (Continuidad por incrementos). Una función f es continua en un valor $x = x_0$ si se cumple que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Prueba.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x\right) \right] = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} f\left(x_0 + x - x_0\right) = \lim_{x \to x_0} f\left(x\right)$$

$$\lim_{x \to x_0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right)$$

Ejemplo. Dada la función $y = f\left(x\right) = 2\sqrt{1 - x^2}$, determinar el incremento de la función cuando la variable independiente cambia de $x_0 = 0.5$ a $x = 0.7$. Estudiar también si la función es continua en $x_0 = 0.5$ a través del límite $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Mostrar de manera explícita, con una tabla, cómo se cumple este límite, es decir, cómo al tender a cero el incremento de "x", lo mismo le sucede al incremento Δy de la función.

Solución. El incremento de la variable independiente es:

$$\Delta x = x - x_0 \quad ; \quad \begin{matrix} x = 0.7 \\ x_0 = 0.5 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = 0.7 - 0.5 \quad \therefore \quad \Delta x = 0.2$$

$$\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) \quad ; \quad \begin{matrix} f\left(x_0 + \Delta x\right) = f\left(0.7\right) = 1.428 \\ f\left(x_0\right) = f\left(0.5\right) = 1.732 \end{matrix}$$

$$\Delta y = 1.428 - 1.732 \quad \therefore \quad \Delta y = -0.304$$

Continuidad en $x_0 = 0.5$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \left[f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) \right]$$

$$\Delta y = 2\sqrt{1 - \left(x_0 + \Delta x\right)^2} - 2\sqrt{1 - x_0^2}$$

$$\Delta y = 2\sqrt{1 - \left(0.5 + \Delta x\right)^2} - 2\sqrt{1 - 0.5^2}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[2\sqrt{1-(0.5+\Delta x)^2} - 2\sqrt{1-0.5^2} \right]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2\sqrt{1-0.5^2} - 2\sqrt{1-0.5^2} \quad ; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

$$\therefore \quad f(x) \quad \textbf{es continua en} \quad x = 0.5$$

Finalmente, se construye una tabla para mostrar explícitamente, mediante un cálculo numérico, como Δy tiende a cero conforme Δx tiende a cero.

x_0	Δx	$f(x_0+\Delta x)$	$f(x_0)$	Δy
0.5	0.2	1.428	1.732	–0.304
0.5	0.1	1.600	1.732	–0.132
0.5	0.01	1.720	1.732	–0.012
0.5	0.001	1.731	1.732	–0.001
0.5	0.0001	1.7319	1.732	–0.0001
	$\downarrow$ 0			$\downarrow$ 0

Se observa que cuando Δx se aproxima a cero, Δy también se aproxima a cero, es decir, que $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ y por lo tanto la función $f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$ es continua en $x = 0.5$.

ASÍNTOTAS

Definición. Sea f una función algebraica cuyo límite no existe cuando la variable independiente "x" tiende a un cierto valor "x_0", el cual anula el denominador de la función; entonces, esta tiene una asíntota vertical, cuya ecuación es $x = x_0$.

Ejemplo. Determinar, si existen, las ecuaciones de las asíntotas verticales para las siguientes funciones:

$$i) \quad f(x) = \frac{x}{x^2-5x+6} \quad ; \quad ii) \quad y = \sqrt{\frac{5x+1}{1-x}} \quad ; \quad iii) \quad f(x) = \frac{x^3-6x^2}{x-6}$$

Las funciones “tangente” y “secante” tienen asíntotas verticales cuyas ecuaciones son:

$$x=(2n-1)\frac{\pi}{2} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

mientras que las funciones “cotangente” y “cosecante” tienen asíntotas verticales de ecuaciones:

$$x=n\,\pi \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Definición. Sea f **una función algebraica cuyo límite sí existe cuando la variable independiente** $"x"$ **tiende a** ∞**; entonces, la función tiene una asíntota horizontal, cuya ecuación es:**

$$y=\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \textbf{o bien} \quad y=\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

$\boxed{\textbf{Ejemplo}}$. **Determinar, si existen, las ecuaciones de las asíntotas horizontales para las siguientes funciones:**

$$i)\quad y=\frac{4x^2+1}{2x^2+5}\quad ;\quad ii)\quad f(x)=\frac{4}{x^2-x-6}\quad ;\quad iii)\quad y=\frac{\sqrt{2x^4+4}}{x(x-2)}$$

$\boxed{\textbf{Ejemplo}}$. **Determinar, si existen, las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de la siguiente función y hacer un trazo aproximado de su gráfica en la cual se señalen las asíntotas.**

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$$