CAPÍTULO V. SUCESIONES Y SERIES

DEFINICIÓN. Una sucesión infinita, o simplemente sucesión, es una función cuyo dominio está constituido por el conjunto de los números naturales y cuyo recorrido, que es un subconjunto de los números reales, se expresa en un listado como sigue:

$$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$$

Como variable independiente se acostumbra usar la letra $"n"$ **para indicar que, a diferencia de las funciones cuyos dominios son denotados con las últimas letras del abecedario y que consideran valores reales, en las sucesiones el dominio son los números naturales. Al enésimo término de la Sucesión** $f(n)$ **también se le identifica con** $a(n)$**, con** a_n **o bien con** $\{a_n\}$**.**

Ejemplo. Dar los primeros cinco términos y el término enésimo de las siguientes Sucesiones Infinitas:

$$i)\quad a(n) = \sqrt{n+1} \quad ; \quad ii)\quad a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$$

$$iii)\quad b_n = (-1)^n \frac{n^2}{2n+1} \quad ; \quad iv)\quad \{5\}$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Como las funciones, las sucesiones también se pueden graficar, correspondiendo sus valores funcionales a cada uno de los números naturales sustituido en su regla de correspondencia.

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Teorema. Sea una sucesión $\{a_n\}$**. Se dice entonces que tiene límite, denotado como** L **y expresado como**

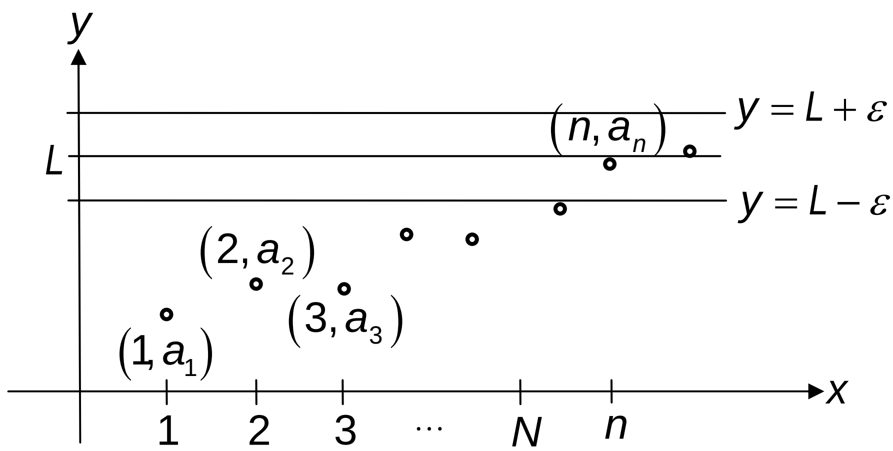
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

si para toda $\varepsilon > 0$ **y tan pequeña como se desee, existe un número entero** N **tal que**

$$|a_n - L| < \varepsilon \qquad \textbf{siempre que} \qquad n > N$$

Si existe el límite, entonces la sucesión es convergente y en caso contrario se llama divergente.

Representación geométrica:



Los límites de las sucesiones infinitas también cumplen las propiedades de los límites de las funciones. Además es importante hacer ver que como los términos de la sucesión son valores funcionales, al estudiar su convergencia o divergencia se puede aplicar la Regla de L'Hopital. Al respecto, resulta conveniente enunciar aquí el teorema correspondiente a esta regla para poder contar con una herramienta valiosa en el Cálculo del límite de una sucesión.

Teorema. Regla de L'hopital. Supónganse las funciones f **y** g **diferenciables en cada punto de un intervalo abierto** (a,b) **que contiene al valor** $"c"$ **excepto posiblemente en este valor; y sea** $g'(x)\neq 0$ **para toda** $x\neq c$ **en el intervalo. Sea también** L **que denota tanto un valor real o bien** $+\infty$ **o** $-\infty$**, y supóngase que** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **es una forma indeterminada en** $"c"$**. Luego, si** $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L$ **entonces**

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

De acuerdo con este teorema, el límite del cociente de dos funciones es igual al límite del cociente de sus derivadas. Y si al derivar numerador y denominador de la expresión original se vuelve a presentar una indeterminación de las formas $\dfrac{0}{0}$ **ó** $\dfrac{\infty}{\infty}$**, se repite nuevamente la Regla hasta que el resultado está determinado o no existe el límite.**

Ejemplo. Calcular el valor numérico de los límites de las siguientes sucesiones y determinar con ello su naturaleza (utilizar la Regla de L'Hopital cuando se considere necesario o para verificar el resultado e ilustrar la técnica).

$$i)\left\{\frac{2n^3+5n^2-4n-3}{n^3+n^2-10n+8}\right\}\quad ;\quad ii)\left\{n^2\,sen\frac{2}{n^2}\right\}\quad ;\quad iii)\left\{(-1)^n\frac{n^3}{1+n^2}\right\}$$

En ocasiones el límite resulta difícil y entonces es conveniente utilizar la propiedad del "emparedado", teorema cuyo enunciado es el siguiente:

Teorema. Sean las sucesiones definidas por $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$**, para las cuales se cumple que** $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n$ **y además, se sabe que** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$**. Entonces**

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. **Calcular el límite de la sucesión** $\left\{ \dfrac{\cos n}{n} \right\}$**.**

Teorema. Sea una sucesión cuyo término enésimo es r^n**. Entonces:**

$$i)\quad \lim_{n\to\infty} r^n = 0 \qquad si \quad |r| < 1$$

$$ii)\quad \lim_{n\to\infty} |r^n| \to \infty \quad si \quad |r| > 1$$

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. **Calcular el límite de las sucesiones:**

$$i)\quad \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\} \quad ; \quad ii)\quad \left\{ (1.02)^n \right\}$$

Teorema. Si para una sucesión $\{b_n\}$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty}|b_n| = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

Ejemplo. Verificar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ para:

$$a_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Definición. Sucesión monótona
Una sucesión es monótona creciente si sus términos consecutivos no decrecen y es monótona decreciente si sus términos sucesivos no crecen.

Definición. Sucesión acotada
Se dice que una sucesión es acotada si existe un valor real positivo $"C"$ tal que:

$$|a_n| \le C \quad \forall n$$

Teorema. Si se tiene una sucesión monótona (creciente o decreciente) y está acotada, entonces tiene límite, por lo que es convergente.

Ejemplo. La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es acotada y es monótona decreciente, por lo que es convergente y su límite es:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

SERIES INFINITAS. TELESCÓPICAS Y GEOMÉTRICAS

DEFINICIÓN. Considérese la sucesión $\{a_n\}$ y súmense ahora sus términos. A la expresión obtenida que es:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

se le llama "serie infinita" o simplemente "serie" y se denota con

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Como se trata de un número infinito de sumandos, es necesario definir lo que se entiende por "suma infinita" y para ello es conveniente formar una sucesión con las sumas parciales de los términos de las series, que se expresa como:

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

en donde

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

DEFINICIÓN. Considérese la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

y sea la sucesión de sus sumas parciales

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

Entonces la serie dada es convergente si el límite de su suma parcial enésima existe, es decir, si

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S \quad ; \quad S \in \mathbb{R}$$

y el valor numérico "S" del límite equivale a la "suma finita" de la "serie infinita". En el caso de que el límite no existe, se dice que la serie es divergente.

Si fuera posible siempre determinar el límite de la suma parcial enésima, todo se concretaría a calcularlo y así determinar su naturaleza. Pero en la mayoría de los casos es complicado.

Ejemplo. Sea la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$

Algunas de sus sumas parciales, incluyendo la suma parcial enésima, que recuerda al "príncipe de las matemáticas" Gauss, por la anécdota que de él se cuenta al respecto, son:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 + 2 = 3 \\ S_3 &= 1 + 2 + 3 = 6 \\ &\vdots \\ S_n &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Se obtiene el límite de la suma parcial enésima y se ve que:

$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} \to \infty$ **por lo que la serie es divergente.**

Ejemplo. (Serie telescópica). Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$**. Si se escriben algunos de sus sumandos y sus respectivas sumas parciales se obtiene lo siguiente:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} + \cdots$$

$$S_1 = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \doteq 0.666666666$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 0.75$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = 0.8$$

$$S_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} \doteq 0.833333333$$

$$S_6=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}=0.857142857$$
$$S_7=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}=0.875$$
$$S_8=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}=0.888888888$$
$$S_9=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}=0.9$$
$$S_{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}=0.909090909$$

El término enésimo se puede escribir de la siguiente forma, al descomponerlo en dos fracciones racionales:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}\quad\Rightarrow\quad 1=An+A+Bn$$

$$\Rightarrow\quad \begin{matrix}0=A+B\\ 1=A\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}A=1\\ B=-1\end{matrix}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

y entonces, los términos de la serie se pueden escribir como sigue:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots$$

Como se ve, todos los términos menos dos se cancelan y la suma parcial enésima queda como:

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}$$

y el límite de esta suma parcial enésima es

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

luego esta serie, conocida como "telescópica", es convergente y su límite es "uno", que es el valor de su suma finita.

$\boxed{\textbf{Ejemplo}}$**. (Serie telescópica). Analizar la serie infinita**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 3n - 2}$$

Serie Geométrica . Sea la serie infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

Cada término se obtiene al multiplicar el término inmediato anterior por un término conocido como la "razón" de la serie.

$$\frac{ar^2}{ar} = \frac{ar}{a} = r$$

Ejemplo. **Supóngase que se tienen los siguientes términos de una serie y se pretende saber si se trata de una serie geométrica:**

$$2,\frac{4}{5},\frac{8}{25},\frac{16}{125},\frac{32}{625}$$

Solución

Se divide cada término entre el anterior y,

$$\frac{\frac{4}{5}}{2}=\frac{2}{5} \quad ; \quad \frac{\frac{8}{25}}{\frac{4}{5}}=\frac{40}{100}=\frac{2}{5} \quad ; \quad \frac{\frac{16}{125}}{\frac{8}{25}}=\frac{400}{1000}=\frac{2}{5}$$

$$\frac{\frac{32}{625}}{\frac{16}{125}}=\frac{4000}{10000}=\frac{2}{5}$$

Luego se trata de una serie geométrica con $r=\frac{2}{5} \quad y \quad a=2$ **,**

por lo que su término general es: $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{2}{5}\right)^{n}$

TEOREMA. La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^{n}=a+ar+ar^{2}+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

i) **Converge y su suma es** $S=\frac{a}{1-r}$ **si** $|r|<1$

ii) **Diverge si** $|r|\geq 1$

PRUEBA. Sea la suma parcial enésima

$$S_n=a+ar+ar^{2}+\cdots+ar^{n-1}$$

Si se multiplican los dos miembros por la razón "r"

$$rS_n=ar+ar^{2}+ar^{3}+\cdots+ar^{n}$$

Si se restan ambas expresiones se tendrá:

$$S_n-rS_n=\left(a+ar+ar^{2}+\cdots+ar^{n-1}\right)-\left(ar+ar^{2}+ar^{3}+\cdots+ar^{n}\right)$$

$$(1-r)S_n=a-ar^{n} \quad \Rightarrow \quad S_n=\frac{a}{1-r}-\frac{a}{1-r}r^{n}$$

Si se calcula el límite de la suma parcial enésima se llega a:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}r^n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r}r^n = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}\lim_{n\to\infty} r^n$$

De acuerdo con un teorema tratado en las Sucesiones, si $|r| < 1$ **entonces** $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ **por lo que** $S = \dfrac{a}{1-r}$ **y la serie es convergente. Si** $|r| \geq 1$ **el límite no existe y la serie es divergente.**

$\boxed{\textbf{Ejemplo}}$**. Dadas las siguientes series, determinar si son convergentes (dado el caso dar su suma) o divergentes:**

$$i)\quad 4 + \frac{8}{5} + \frac{16}{25} + \frac{32}{125} + \cdots \quad ; \quad ii)\quad \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{2}{27} - \frac{2}{81} + \cdots$$

$$iii)\quad \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \quad ; \quad iv)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{8^n} \quad ; \quad v)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^{n+1}}{3^n}$$

$\boxed{\textbf{Ejemplo}}$. **Expresar el decimal periódico** $8.353535\ldots$ **como la razón de dos números enteros.**

Solución.

$$8.353535\ldots = 8 + \frac{35}{100} + \frac{35}{100^2} + \frac{35}{100^3} + \cdots$$
$$= 8 + \frac{35}{100}\left(1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots\right)$$

La serie $1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots$ **es una serie geométrica con** $a = 1 \quad y \quad r = \frac{1}{100} < 1$ **luego es convergente y su suma es** $S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-0.01} = \frac{1}{0.99}$**. Se sustituye este valor y se tiene:**

$$8.353535\ldots = 8 + \frac{35}{100}\left(\frac{1}{0.99}\right) = 8 + \frac{35}{99}$$
$$\therefore \quad 8.353535\ldots = \frac{827}{99}$$

CONDICIÓN NECESARIA PARA LA CONVERGENCIA

TEOREMA. Considérese la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Si ésta es convergente, entonces se cumple que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

COROLARIO. Sea la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Entonces, si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, la serie es divergente.

El corolario es más útil que el teorema mismo ya que implica que lo primero que se debe hacer al analizar una serie es obtener el límite del término enésimo y si resulta diferente de cero, se concluye que la serie es divergente.

Ejemplo. Determinar el carácter de cada una de las siguientes series:

$$i)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3n!+4} \qquad ii)\quad \sum_{n=0}^{\infty} 6^n \qquad iii)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{n^3+2n^2+1}{8n^3+4}}$$

TEOREMA. El carácter convergente o divergente de una serie infinita no cambia si se suprime o se agrega un número finito de términos al principio de ésta.

IGUALDAD DE SERIES. Dos Series infinitas, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son iguales si sus respectivos términos son iguales, esto es, si se cumple que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad si \quad a_n = b_n \quad \forall \quad n \in N$$

SUMA DE SERIES. Para definir la suma de dos series infinitas, basta con sumar los términos enésimos, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + b_n \right)$$

TEOREMA.

i) **Sean dos series infinitas convergentes** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$**, con sumas** $A \quad y \quad B$ **respectivamente. Entonces** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + b_n \right)$ **es convergente y su suma equivale a** $S = A + B$

ii) **Sean dos series infinitas, una** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **convergente y otra** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **divergente. Entonces,** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + b_n \right)$ **es divergente.**

iii) **Sean** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **una serie infinita y** $c \in \mathbb{R}$**. Entonces el producto de** $c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c \, a_n$ **y si la serie es convergente con suma** $"A"$**, entonces la serie** $\sum_{n=1}^{\infty} c \, a_n$ **es convergente y su suma es** $S = c\,A$

Ejemplo. Investigar la naturaleza de la siguiente serie y en caso de ser convergente, calcular su suma:

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{4^{n-1}} + \frac{10}{n(n+1)} \right)$$

SERIE ARMÓNICA. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ **se conoce como la "serie armónica divergente". Ahora se verá el por qué diverge. Se analizarán las sumas parciales en potencias de "dos", es decir,**

$$S_2 \quad ; \quad S_4 \quad ; \quad S_8 \quad ; \quad S_{16} \quad ; \quad S_{32} \quad ; \quad \ldots$$

Entonces se ,puede escribir:

$$S_2 = 1+\frac{1}{2}$$

$$S_4 = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) > 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = 1+\frac{2}{2}$$

$$S_8 = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$

$$> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) = 1+\frac{3}{2}$$

$$S_{16} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right) >$$

$$> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right) = 1+\frac{4}{2}$$

De la misma forma se tendría que:

$$S_{32} > 1+\frac{5}{2} \quad ; \quad S_{64} > 1+\frac{6}{2} \quad ; \quad S_{128} > 1+\frac{7}{2} \quad ; \quad \cdots \quad ; \quad S_{2^n} > 1+\frac{n}{2}$$

Si se calcula el límite de $1+\frac{n}{2}$ **se obtiene que:**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{2}\right) \to \infty$$

Finalmente, $\lim_{n\to\infty} S_{2^n} \to \infty$ **y por lo tanto la serie armónica es divergente.**

SERIES INFINITAS DE TÉRMINOS POSITIVOS

Si en una serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **todos sus términos son positivos, entonces sus sumas parciales cumplen que**

$$S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S_n < \cdots$$

Esta sucesión de sus sumas parciales es monótona creciente; luego se deduce que para que esta serie de términos positivos sea convergente, debe ser además acotada.

En múltiples aplicaciones de las series infinitas, lo importante no es conocer su suma sino solamente saber si son convergentes o divergentes.

Se verá la serie de gran utilidad conocida como serie $"p"$**.**

Teorema (Serie $"p"$**). La serie infinita**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$ **, donde** $p \in \mathbb{R}$**:**

i) **Si** $p > 1$ **es convergente.**

ii) **Si** $p \le 1$ **es divergente.**

iii) **Si** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = S$**, el resto** $R_N = S - S_N$ **está acotado por**

$$0 < R_N < \frac{1}{N^{p-1}(p-1)}$$

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Investigar la naturaleza de las siguientes series:

$$i)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \qquad\qquad ii)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

$\boxed{\text{Ejemplo}}$. Probar que la siguiente serie converge y estimar el resto tras cinco términos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

Solución. Como $p = 3 > 1$ **la serie converge.**

$$R_5 < \frac{1}{N^{p-1}(p-1)} = \frac{1}{5^2(2)} = \frac{1}{50} = 0.02$$

Se deduce que la suma de la serie puede acotarse en la forma

$$S_5 < S < S_5 + 0.02$$

Finalmente, como

$$S_5 = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} \approx 1.186$$

Se concluye que

$$1.186 < S < 1.206$$

TEOREMA. CRITERIO DE LA COMPARACIÓN

Sean las dos series infinitas con términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **. Entonces:**

$i)$ **Si** $0 \le a_n \le b_n$ **y** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **es convergente,** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **también es convergente y se dice que es dominada por la serie** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **.**

$ii)$ **Si** $a_n \ge b_n$ **y** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **es divergente, la serie** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **también es divergente y se dice que domina a la serie** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **.**

Ejemplo. Investigar si las siguientes series son convergentes o divergentes:

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+3^n} \qquad ; \qquad ii)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{\sqrt{n}-1}$$

EJEMPLO. Determinar la naturaleza de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2+4^n}$$

TEOREMA. CRITERIO DEL LÍMITE DEL COCIENTE DE LA COMPARACIÓN

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **series de términos positivos y sea** $"L"$ **un valor real. Si se cumple que:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$$

entonces las dos series son convergentes o las dos son divergentes.

Ejemplo. Investigar la naturaleza de las siguientes series infinitas:

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^{\frac{5}{4}}+6} \quad ; \quad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+7}} \quad ; \quad iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+8n^3+2n}{2^n\left(11n^4+9\right)}$$

Ejemplo. Investigar si la siguiente serie es convergente o divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{1}{4}} + 5n^3 - 1}{2n^{\frac{9}{2}} - 3n^{\frac{5}{2}} + 7n^{\frac{1}{2}}}$$

SERIES ALTERNADAS

Se conocen como series alternadas a aquellas cuyos términos cambian de signo de manera alternada, pudiendo ser la alternancia uno a uno o de manera irregular. Se denotan como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$$

TEOREMA. CRITERIO DE LA SERIE ALTERNADA

La serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ **es convergente si cumple las siguientes condiciones:**

i) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

ii) $a_{n+1} \le a_n$ **para todo valor entero positivo** "n"

Nota. Otras formas alternativas equivalentes a la segunda condición son:

- $f'(x) < 0 \quad \forall\, x$, entero positivo $\quad$ (decreciente)

- $a_n - a_{n+1} \geq 0 \quad \forall\, n$, entero positivo
- $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \quad \forall\, n$, entero positivo

Ejemplo. Determinar la naturaleza de las siguientes series alternadas:

$i)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$; $ii)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n+5}{n(n+1)}$; $iii)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n}{7n^2-4}$

$iv)\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n}\frac{1}{1+2^{-n}}$; $v)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{5n}{10n-6}$; $vi)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n!}\right)$

TEOREMA. ERROR ESTIMADO PARA UNA SERIE ALTERNADA CONVERGENTE

La suma parcial S_n de una serie alternada convergente difiere de la suma S de la serie en un error estimado E_n menor al valor absoluto del término a_{n+1}, esto es,

$$E_n < a_{n+1}$$

Ejemplo. Verificar que la siguiente serie alternada es convergente y calcular la suma "S" con una aproximación de cuatro cifras decimales.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}$$