

## CÁLCULO VECTORIAL

### FUNCIONES VECTORIALES

#### Conceptos fundamentales

Definición. Una función vectorial de variable vectorial es una regla que asocia a cada punto " $r$ " de una cierta región  $S \subset \mathbb{R}^n$  un vector  $\vec{F}(\vec{r}) \in \mathbb{R}^m$  y se denota como

$$\vec{F}: S \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Al conjunto " $S$ " de valores que toma la variable independiente, se le denomina dominio y al conjunto de valores que toma  $\vec{F}(\vec{r})$  se le llama imagen o recorrido. Las funciones vectoriales se conocen también como campos vectoriales y aquí se clasificarán en:

- Campos vectoriales de variable escalar
- Campos vectoriales de variable vectorial

Definición. Un campo vectorial de variable escalar es una función vectorial con dominio en los reales, es decir, cuando  $n=1$ . En dos y tres dimensiones se acostumbra representar como:

$$\vec{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow \vec{F}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

$$\vec{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \Rightarrow \vec{F}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Ejemplos de funciones vectoriales de variable escalar:

$$i) \vec{F}(t) = t\hat{i} + t^3\hat{j}$$

$$ii) \quad \bar{F}(\theta) = a(\theta + \text{sen}\theta) \hat{i} + a(1 - \text{cos}\theta) \hat{j}$$

$$iii) \quad \bar{F}(t) = (x_0 + at) \hat{i} + (y_0 + bt) \hat{j} + (z_0 + ct) \hat{k}$$

$$iv) \quad \bar{F}(v) = a \text{cos} v \hat{i} + b v \hat{j} + a \text{sen} v \hat{k}$$

Sus gráficas son las siguientes:

Cuando el dominio de la función vectorial es de dimensión mayor de uno, o sea,  $n > 1$  se tiene el caso de funciones vectoriales de variable vectorial.

Ejemplos de funciones vectoriales de variable vectorial:

$$i) \quad \bar{F}(t, s) = (x_0 + a_1 s + a_2 t) \hat{i} + (y_0 + b_1 s + b_2 t) \hat{j} + (z_0 + c_1 s + c_2 t) \hat{k}$$

$$ii) \quad \bar{F}(u, v) = u \text{cos} v \hat{i} + u \text{sen} v \hat{j} + u^2 \hat{k}$$

$$iii) \quad \bar{F}(u, v) = \text{sen} u \cos v \hat{i} + \text{sen} u \text{sen} v \hat{j} + \cos u \hat{k}$$

Sus gráficas son las siguientes:

### Límites y continuidad de funciones vectoriales

**Definición.** El límite de una función vectorial, cuando la variable  $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$  tiende al punto  $\bar{r}_0 \in \mathbb{R}^n$ , denotado como

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0} \bar{F}(\bar{r}) = \bar{l}$$

existe sí y sólo si para  $\varepsilon > 0$  y  $\delta > 0$  se cumple que:

$$|\bar{F}(\bar{r}) - \bar{l}| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |\bar{r} - \bar{r}_0| < \delta$$

**Teorema.** Sea  $\bar{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida por

$$\bar{F}(\bar{r}) = [y_1(\bar{r}), y_2(\bar{r}), \dots, y_m(\bar{r})]$$

Entonces:

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0} \bar{F}(\bar{r}) = \left[ \lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0} y_1(\bar{r}), \lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0} y_2(\bar{r}), \dots, \lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0} y_m(\bar{r}) \right]$$

**Teorema. Propiedades.** Sean

$$\bar{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{y} \quad \bar{G}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

tales que  $\lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0} \bar{F}(\bar{r}) = \bar{A}$  y  $\lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0} \bar{G}(\bar{r}) = \bar{B}$ , entonces se

cumple que:

i) Si  $\bar{A}$  existe, es único.

ii)  $\lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0} [k\bar{F}(\bar{r}) + \bar{G}(\bar{r})] = k\bar{A} + \bar{B} \quad ; \quad k \in \mathbb{R}$

iii)  $\lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0} [\bar{F}(\bar{r}) \cdot \bar{G}(\bar{r})] = \bar{A} \cdot \bar{B}$

iv) Para  $m=3$  ;  $\lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0} [\bar{F}(\bar{r}) \times \bar{G}(\bar{r})] = \bar{A} \times \bar{B}$

v)  $\lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0} |\bar{F}(\bar{r})| = |\bar{A}|$

**Ejemplo.** Calcular  $\lim_{t \rightarrow 1} \left( \frac{\text{sen} \frac{\pi}{2} t}{t} \hat{i} - \frac{t^2 - 1}{1 - t} \hat{j} + e^{-\frac{1}{|t-1|}} \hat{k} \right)$

**Ejemplo.** Calcular  $\lim_{r \rightarrow \bar{r}_0} \bar{F}(r)$  si

$$\bar{F}(x, y) = x \hat{i} + \tan(xy) \hat{j} + \ln\left(\frac{x}{y}\right) \hat{j} + \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2y - y^3} \hat{k}$$

$$\bar{r}_0 = (1, 1)$$

## Continuidad

**Definición.** Sea  $\bar{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función vectorial. Se dice que  $\bar{F}$  es continua en  $\bar{r}_0 \in \mathbb{R}^n$  sí y sólo si se cumple que

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0} \bar{F}(\bar{r}) = \bar{F}(\bar{r}_0)$$

**Definición.** Se dice que  $\bar{F}(\bar{r})$  es continua en  $\bar{r} = \bar{r}_0$  si se cumple que

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow \bar{r}_0} \left| \bar{F}(\bar{r}) - \bar{F}(\bar{r}_0) \right| = \bar{0} \text{ o bien } \lim_{\Delta \bar{r} \rightarrow 0} \Delta \bar{F} = 0$$

## Derivadas

**Definición.**

i) Sea  $\bar{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función vectorial de variable escalar "t". Entonces se define a la derivada de  $\bar{F}$  en  $t_0$  como:

$$\frac{d\bar{F}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{F}(t_0 + \Delta t) - \bar{F}(t_0)}{\Delta t}$$

(siempre que el límite exista)

ii) Sea  $\bar{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función vectorial de variable vectorial  $\bar{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , esto es,  $\bar{F}(\bar{r}) = \bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Entonces se define la derivada de  $\bar{F}$  con respecto a  $x_i$  en  $\bar{r}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  como:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\bar{F}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0 + \Delta x_i, \dots, x_n^0) - \bar{F}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\Delta x_i}$$

$i = 1, 2, \dots, n$

(siempre que el límite exista)

**Teorema.**

i) Sea  $\bar{F}$  una función vectorial de variable escalar definida por  $\bar{F}(t) = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)]$ . Entonces

$$\frac{d\bar{F}(t)}{dt} = [\dot{f}_1(t), \dot{f}_2(t), \dots, \dot{f}_m(t)]$$

ii) Sea  $\bar{F}$  una función vectorial de variable vectorial definida por  $\bar{F}(\bar{r}) = [f_1(\bar{r}), f_2(\bar{r}), \dots, f_m(\bar{r})]$ . Entonces

$$\boxed{\frac{\partial \bar{F}}{\partial x_i} = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \frac{\partial f_2}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \right)}$$

**Ejemplo.** Calcular la primera y la segunda derivadas de la función definida por

$$\bar{F}(t) = t \hat{i} \operatorname{sen} t + t \ln t \hat{j} - \operatorname{ang} \cot t \hat{k}$$

**Ejemplo.** Calcular las derivadas parciales y la mixta para la función:

$$\vec{F}(x, y) = e^{xy} \hat{i} + y \ln x \hat{j} + \cos xy \hat{k}$$



**Teorema.** Sean  $\bar{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $\bar{G}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  dos funciones vectoriales derivables con respecto a  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Entonces:

$$i) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (k\bar{F} + \bar{G}) = k \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial x_i} \quad ; \quad k \in \mathbb{R}$$

$$ii) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{F} \cdot \bar{G}) = \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_i} \cdot \bar{G} + \bar{F} \cdot \frac{\partial \bar{G}}{\partial x_i}$$

$$iii) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{F} \times \bar{G}) = \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_i} \times \bar{G} + \bar{F} \times \frac{\partial \bar{G}}{\partial x_i} \text{ para } m \leq 3$$

### Diferenciales

**Definición.** Sea  $\bar{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función vectorial de variable vectorial continua en un entorno o vecindad del punto  $t = t_0$ . Entonces la función  $\bar{F}(t) = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)]$  es diferenciable en  $t = t_0$  sí y sólo si su incremento puede escribirse como:

$$\Delta \bar{F} = [f_1'(t_0)\Delta t + \eta_1\Delta t, f_2'(t_0)\Delta t + \eta_2\Delta t, \dots, f_m'(t_0)\Delta t + \eta_m\Delta t]$$

lo que equivale a  $\Delta \bar{F} = \left. \frac{d\bar{F}}{dt} \right|_{t=t_0} \Delta t + \bar{\eta}\Delta t$  donde

$$\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) \rightarrow (0, 0, \dots, 0) \quad \text{cuando } \Delta t \rightarrow 0$$

A la expresión  $d\bar{F} = [f_1'(t), f_2'(t), \dots, f_m'(t)]\Delta t$  se le denomina "diferencial de la función vectorial  $\bar{F}$ ". Antes de ver la

diferencial de una función vectorial de variable vectorial, considérese el siguiente concepto:

Definición. Sea  $\bar{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función vectorial de variable vectorial continua en una región  $R \subset \mathbb{R}^n$ . Se define a la derivada de  $\bar{F}$  con respecto al vector  $\bar{r}$  a:

$$\frac{d\bar{F}}{d\bar{r}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

donde  $\bar{F} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  y  $\bar{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

A esta derivada se le conoce como gradiente generalizado y se acostumbra representarlo con  $\bar{\nabla} \bar{F}$  o con  $\text{grad}(\bar{F})$ . Otra forma de denominar a esta derivada es: matriz jacobiana de  $f_1, f_2, \dots, f_m$  con respecto a  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Nótese como los renglones de la matriz son los gradientes de las componentes de  $\bar{F}$  y a su vez, la columna  $i$  son las derivadas parciales de  $\bar{F}$  con respecto a la variable  $x_i$ .

**Ejemplo.** Obtener la matriz jacobiana de la siguiente función:

$$\bar{F}(x, y, z) = e^{xyz} \hat{i} + xy \ln(xyz) \hat{j} + \arctan(x^2 y^2 z^2) \hat{k}$$

Para el caso especial en que  $n = m$ , la matriz jacobiana es cuadrada y a su determinante se le llama jacobiano (matemático alemán Carl Jacobi 1804-51).

**Definición.** Sea  $\bar{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida por

$$\bar{F}(\bar{r}) = [f_1(\bar{r}), f_2(\bar{r}), \dots, f_n(\bar{r})]$$

donde  $\bar{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Entonces, al determinante

$$J \left( \begin{array}{c} f_1, f_2, \dots, f_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{array} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

se le denomina jacobiano de  $f_1, f_2, \dots, f_n$  con respecto a  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

### Relación entre los jacobianos

Teorema. Sea  $\bar{U}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por

$$\bar{U}(\bar{V}) = [u_1(\bar{V}), u_2(\bar{V}), \dots, u_n(\bar{V})]$$

donde  $\bar{V} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ . Entonces:

$$i) \quad J \left( \frac{u_1, u_2, \dots, u_n}{v_1, v_2, \dots, v_n} \right) J \left( \frac{v_1, v_2, \dots, v_n}{u_1, u_2, \dots, u_n} \right) = 1$$

ii) Si además  $v_i(\bar{r}) = v_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$

$$J \left( \frac{u_1, u_2, \dots, u_n}{x_1, x_2, \dots, x_n} \right) = J \left( \frac{u_1, u_2, \dots, u_n}{v_1, v_2, \dots, v_n} \right) J \left( \frac{v_1, v_2, \dots, v_n}{x_1, x_2, \dots, x_n} \right)$$

siempre y cuando los jacobianos sean diferentes de cero.

**Ejemplo.** Verificar que  $J \left( \frac{u, v}{x, y} \right) = \frac{1}{J \left( \frac{x, y}{u, v} \right)}$  para:

$$\begin{aligned} \bar{r}(u, v) &= x(u, v) \hat{i} + y(u, v) \hat{j} \\ &= u \cos v \hat{i} + u \sin v \hat{j} \end{aligned}$$

**Definición.** Sea  $\bar{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función vectorial de variable vectorial continua en una región  $R \subset \mathbb{R}^n$  que contiene al punto  $\bar{r}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ . Se dice que es diferenciable en  $\bar{r}_0$  si su incremento puede escribirse como:

$$\Delta \bar{F} = \left. \frac{d\bar{F}}{d\bar{r}} \right|_{\bar{r}=\bar{r}_0} \Delta \bar{r} + [\eta_1 \Delta x_1 \quad \eta_2 \Delta x_2 \quad \dots \quad \eta_n \Delta x_n]^T$$

donde  $\left. \frac{d\bar{F}}{d\bar{r}} \right|_{\bar{r}=\bar{r}_0}$  es la matriz jacobiana de  $\bar{F}$  valuada en  $\bar{r}_0$  y

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \rightarrow (0, 0, \dots, 0) \text{ cuando } \Delta \bar{r} \rightarrow \bar{0}$$

A la expresión

$$\boxed{d\bar{F} = \left. \frac{d\bar{F}}{d\bar{r}} \right|_{\bar{r}=\bar{r}_0} d\bar{r} = \bar{\nabla}(\bar{F}) d\bar{r}}$$

se le llama "diferencial de la función vectorial  $\bar{F}$ ".

## Derivada direccional

La derivada direccional de una función vectorial de variable vectorial se calcula a través de  $\frac{d\bar{v}}{ds} = (\bar{\nabla} \bar{v})(\bar{e})$  donde  $\bar{v}$  es el campo vectorial y  $\bar{e}$  la dirección unitaria.

**Ejemplo.** Dada la función vectorial

$$\bar{u} = x^3 y^3 \hat{i} + 2x^2 y^2 \hat{j} + 6xy^4 \hat{k} \quad (x, y \text{ en metros}),$$

determinar de manera aproximada el incremento de la función en forma matricial, tomando como referencia el punto  $P(10,10)$  y un incremento de un milímetro.

**Ejemplo.** El campo de velocidades de un fluido está dado por:

$$\bar{v} = xy \hat{i} + yz \hat{j} + xz \hat{k} \quad ; \quad \left( |\bar{v}| \text{ en } \frac{m}{s} \quad ; \quad x, y, z, \text{ en } m \right)$$

Calcular la rapidez de crecimiento de la velocidad en el punto  $(4, 2, 2)$  y en la dirección que forma un ángulo de  $60^\circ$  con el eje "x" y de  $45^\circ$  con el eje "y".

### Curvas en $\mathbb{R}^3$ y sus ecuaciones vectoriales

Sea  $\vec{F}(t)$  una función vectorial de variable escalar "t", dada por

$$\vec{F}(t) = f_1(t)\hat{i} + f_2(t)\hat{j} + f_3(t)\hat{k}$$

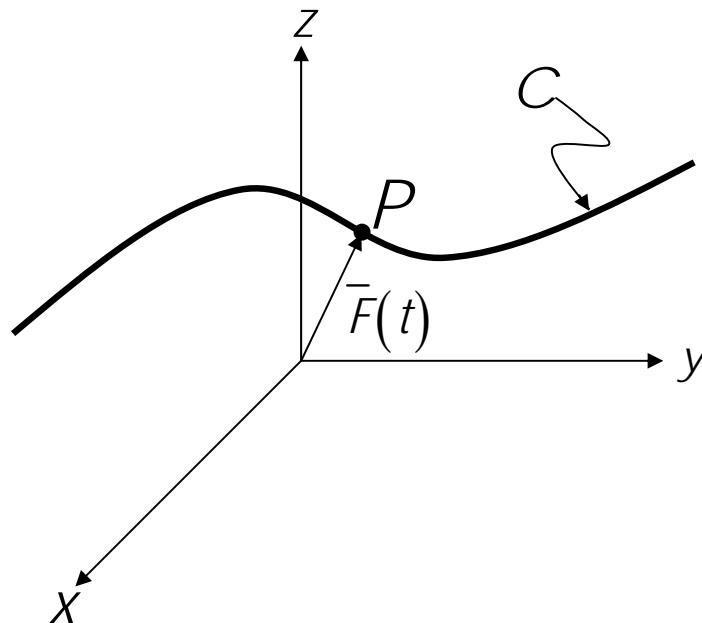
donde  $f_1, f_2, f_3$  son funciones escalares de "t". Entonces, para cada valor de "t" existe un vector de posición

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

que especifica un punto "P" del espacio. Cuando "t" varía, "P" se mueve en una trayectoria curva de tal forma que

$$x = f_1(t) \quad ; \quad y = f_2(t) \quad ; \quad z = f_3(t)$$

A estas ecuaciones se les llama ecuaciones paramétricas de la curva "C" en el espacio  $\mathbb{R}^3$ , y conforman una función  $\vec{F}(t)$  con parámetro "t", como se ve en la figura siguiente:



**Ejemplo.** Trazar la curva representada por la función vectorial:

$$\vec{F}(t) = a \cos t \hat{i} + b \sin t \hat{j} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

en el espacio  $\mathbb{R}^3$  y obtener su ecuación cartesiana.



Ejemplo (Tarea). Trazar la curva representada por la función:

$$\vec{F}(t) = 2 \cos t \hat{i} + 3 \sin t \hat{j} + \frac{1}{2} t \hat{k} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 4\pi$$

en el espacio  $\mathbb{R}^3$ .

Unas ecuaciones paramétricas de la curva son:

$$x = 2 \cos t \quad ; \quad y = 3 \sin t \quad ; \quad z = \frac{1}{2} t$$

Se propone la siguiente tabla para graficar esta curva:

t	t	x	y	z	Z
0	0	2	0	0	0
1.57	$\frac{\pi}{2}$	0	3	$\frac{\pi}{4}$	0.79
3.14	$\pi$	-2	0	$\frac{\pi}{2}$	1.57
4.71	$\frac{3\pi}{2}$	0	-3	$\frac{3\pi}{4}$	2.36

6.28	$2\pi$	2	0	$\pi$	3.14
7.85	$\frac{5\pi}{2}$	0	3	$\frac{5\pi}{4}$	3.93
9.42	$3\pi$	-2	0	$\frac{3\pi}{2}$	4.71
11.0	$\frac{7\pi}{2}$	0	-3	$\frac{7\pi}{4}$	5.5
12.6	$4\pi$	2	0	$2\pi$	6.28

Ejemplo (Tarea). Trazar la curva representada por la función:

$$\vec{F}(t) = 3 \operatorname{senu} \hat{i} + 3 \operatorname{cosu} \hat{j} + u \hat{k} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 4\pi$$

en el espacio  $\mathbb{R}^3$ .

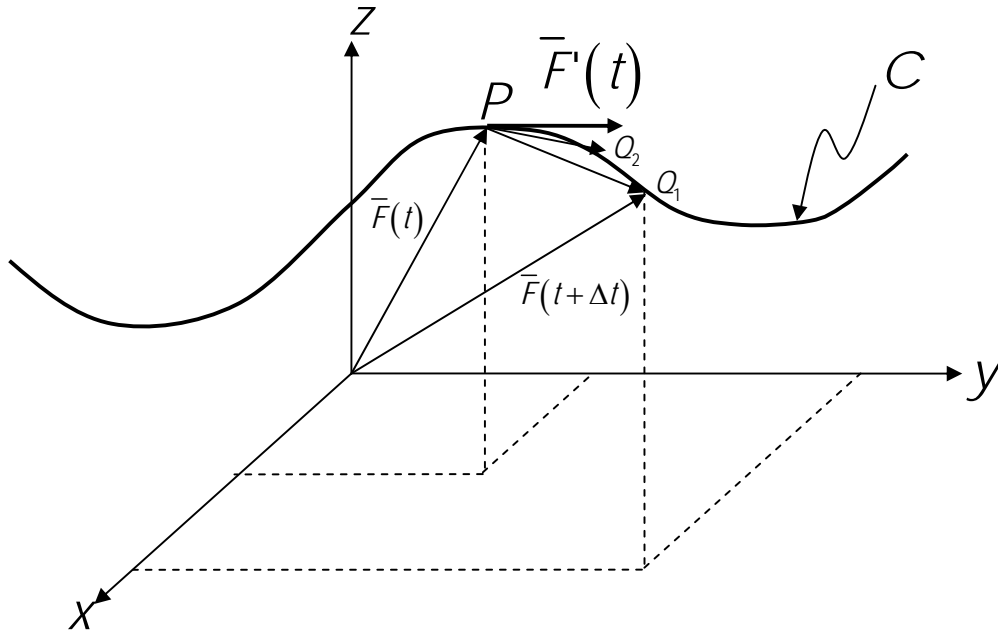
Unas ecuaciones paramétricas de la curva son:

$$x = 3 \operatorname{senu} \quad ; \quad y = 3 \operatorname{cosu} \quad ; \quad z = u$$

Se propone la siguiente tabla para graficar esta curva:

u	u	x	y	z	Z
0	0	0	3	0	0
1.57	$\frac{\pi}{2}$	3	0	$\frac{\pi}{2}$	1.57
3.14	$\pi$	0	-3	$\pi$	3.14
4.71	$\frac{3\pi}{2}$	-3	0	$\frac{3\pi}{2}$	4.71
6.28	$2\pi$	0	3	$2\pi$	6.28
7.85	$\frac{5\pi}{2}$	3	0	$\frac{5\pi}{2}$	7.85
9.42	$3\pi$	0	-3	$3\pi$	9.42
11.0	$\frac{7\pi}{2}$	-3	0	$\frac{7\pi}{2}$	11.0
12.6	$4\pi$	0	3	$4\pi$	12.6

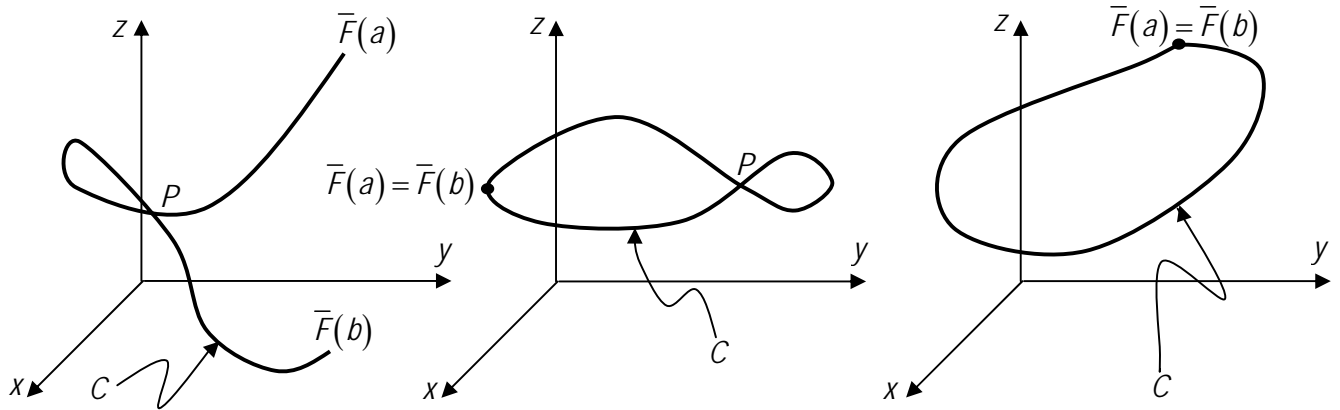
## Interpretación geométrica de la derivada



Sea el punto "P" para el cual  $\vec{F} = \vec{F}(t)$  y "Q<sub>1</sub>" el punto que corresponde a  $\vec{F}(t + \Delta t)$ . Entonces  $\frac{\vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t)}{\Delta t}$  es un vector secante a la curva "C" y por lo tanto

$$\boxed{\vec{F}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t)}{\Delta t}}$$

es un vector tangente a la curva "C" en el punto "P".



Cuando una curva no se interseca consigo misma, excepto en los extremos del intervalo  $[a, b]$ , se denomina *curva simple*.

Si  $\bar{F}(a) = \bar{F}(b)$  para  $a \neq b$ , se dice que la curva es *cerrada*, como en las segunda y tercera figuras.

Si  $\bar{F}(a) = \bar{F}(b)$  y la curva "C" no se interseca a sí misma en ningún otro punto, como en la tercera figura, se le conoce como *curva simple cerrada*.

Un punto  $\bar{F}(t_i) = (f_1(t_i), f_2(t_i), f_3(t_i))$  en una curva "C" en  $\mathbb{R}^3$  se llama *punto singular* de "C" si  $\bar{F}'(t_i) = \bar{0}$  o no existe; de otro modo se denomina *punto no singular*.

La dirección de la curva "C" en el espacio  $\mathbb{R}^3$  en un punto no singular "P" se tomará como la del vector tangente a "C" en "P".

Sea  $t_i$  el valor del parámetro correspondiente a un punto " $P$ ".  
 Se dice que " $P$ " es un *punto ordinario* de la curva " $C$ " cuando " $P$ " es no singular y además las tres derivadas  $\dot{f}_1(t_i)$ ,  $\dot{f}_2(t_i)$ ,  $\dot{f}_3(t_i)$  existen y son continuas en  $t_i$ .

Una curva constituida únicamente por puntos ordinarios se conoce como *curva suave o lisa*. Y si la curva está formada por arcos suaves se denomina *curva seccionalmente suave o suave en pedazos*.

### Parametrización

Las ecuaciones paramétricas de una curva no son únicas.

**Ejemplo.** Obtener dos representaciones paramétricas de la parábola  $y = 1 - x^2$ , utilizando los siguientes parámetros:

i)  $x = t$

ii) la pendiente  $m = \frac{dy}{dx}$  en el punto  $(x, y)$

**Ejemplo.** Trazar la gráfica de la intersección del semielipsoide de ecuación  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{24} + \frac{z^2}{4} = 1$  ;  $z \geq 0$  y el cilindro parabólico de ecuación  $y = x^2$  . Dar una representación paramétrica de la curva intersección y encontrar la correspondiente función vectorial para representar esta curva.

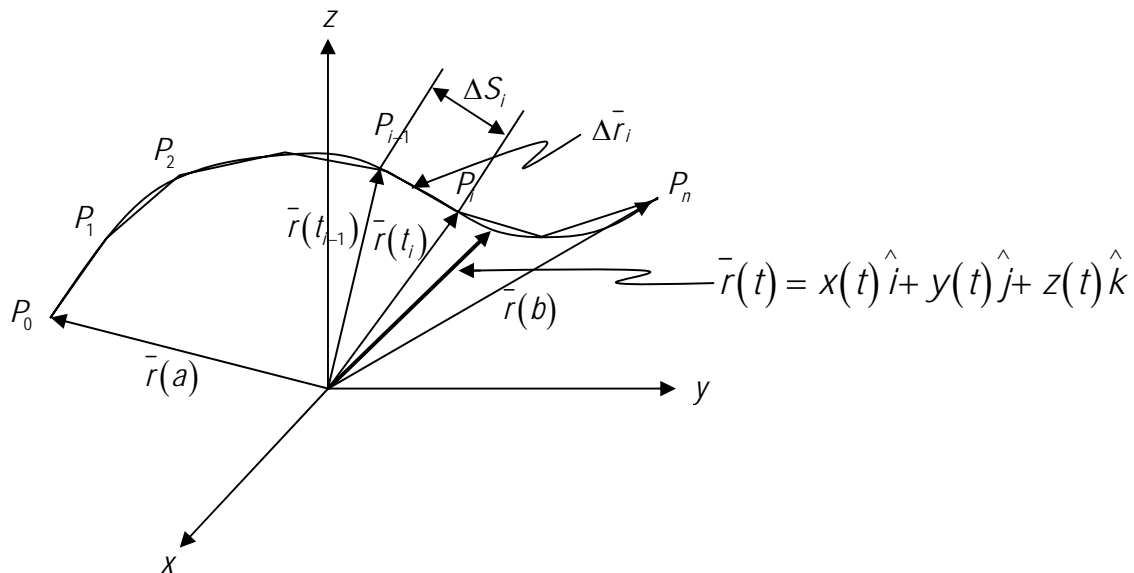
**Longitud de arco como parámetro de una curva**

En el cálculo con una variable independiente se dedujo una expresión para calcular la longitud de arco de una curva plana, la cual, situada en el plano "XY" está dada por:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

para una curva lisa dada por la gráfica de la ecuación  $y = f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ .

Considérese una curva suave "C", sin intersecciones y definida en el intervalo  $[a, b]$ , como se muestra en la figura:



$$\bar{r}(t_i) = x(t_i)\hat{i} + y(t_i)\hat{j} + z(t_i)\hat{k}$$

$$\bar{r}(t_{i-1}) = x(t_{i-1})\hat{i} + y(t_{i-1})\hat{j} + z(t_{i-1})\hat{k}$$

Se tiene una partición "P" de  $[a, b]$  dada por  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ . Para el subintervalo i-esimo la distancia entre sus puntos extremos " $\Delta S_i$ " está dada por el

módulo de la diferencia de los vectores de posición de dichos puntos; esto es,

$$\Delta \bar{r}_i = \bar{r}(t_i) - \bar{r}(t_{i-1}) = (x(t_i) - x(t_{i-1}), y(t_i) - y(t_{i-1}), z(t_i) - z(t_{i-1}))$$

por lo que

$$\Delta S_i \approx |\Delta \bar{r}_i| = \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2 + [z(t_i) - z(t_{i-1})]^2}$$

Como "  $C$  " es una curva suave, entonces  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  son derivables y por lo tanto, para cada una de ellas se cumple el teorema del valor medio del cálculo diferencial, es decir, que existen números  $\xi_i, \rho_i, \eta_i$  en el intervalo abierto  $[t_{i-1}, t_i]$  tales que:

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i) \Delta t_i$$

$$y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\rho_i) \Delta t_i$$

$$z(t_i) - z(t_{i-1}) = z'(\eta_i) \Delta t_i$$

Si se sustituyen estas expresiones en "  $\Delta S_i$  " se tiene que:

$$\Delta S_i = \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\rho_i)]^2 + [z'(\eta_i)]^2} \Delta t_i$$

Luego

$$S \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\rho_i)]^2 + [z'(\eta_i)]^2} \Delta t_i$$

y en el límite, cuando la norma de la partición tiende a cero, se llega a la longitud de arco, la cual es una integral definida. Así

$$S = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\rho_i)]^2 + [z'(\eta_i)]^2} \Delta t_i$$



$$\therefore \boxed{S = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt}$$

**Ejemplo.** Calcular la longitud de arco de la curva representada por la función vectorial

$$\vec{r}(t) = a(\theta + \operatorname{sen}\theta)\hat{i} + a(1 - \cos\theta)\hat{j}$$

en el intervalo  $[0, 2\pi]$

**Ejemplo.** Calcular la longitud de arco de la curva representada por la función vectorial

$$\vec{r}(\theta) = 2 \cos \theta \hat{i} + 2 \operatorname{sen} \theta \hat{j} + \theta \hat{k} \quad \text{en el intervalo } [0, 5\pi]$$

La longitud de arco también puede ser escrita como

$$S = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$$

Si el extremo final de la curva se deja variable, entonces el límite superior de la integral depende del parámetro "  $t$  " y se tiene que la longitud de arco de una curva es una función de la variable escalar "  $t$  ", esto es:

$$S(t) = \int_a^t |\vec{r}'(t)| dt$$

Entonces  $S(t)$  define un nuevo parámetro para la curva "  $C$ " al que se denomina

"parámetro de longitud de arco"

y, de acuerdo con el teorema fundamental del cálculo,

$$\frac{dS}{dt} = \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right|$$

Ejemplo. Parametrizar, en función del parámetro "longitud de arco", las curvas definidas por:

$$i) \quad \bar{r}(t) = a \cos t \hat{i} + a \sin t \hat{j}$$

$$ii) \quad \bar{r}(t) = a \cos t \hat{i} + bt \hat{j} + a \sin t \hat{k}$$

**Solución.**

i) Por las ecuaciones paramétricas que son:

$$x = a \cos t; \quad y = a \sin t \quad \Rightarrow \quad \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2$$

se observa que se trata de una circunferencia situada en el plano "  $XY$ " con centro en el origen y radio igual a "  $a$ ". Se calcula  $S(t)$  y se obtiene:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 \tau + a^2 \cos^2 \tau} \, d\tau; \quad s(t) = at$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{s}{a}$$

luego,

$$\vec{r}(s) = a \cos \frac{s}{a} \hat{i} + a \sin \frac{s}{a} \hat{j}$$

ii) Se trata de una curva conocida como hélice circular que se abre en dirección del eje "y". Se calcula  $s(t)$  y se tiene que:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \tau + b^2 + a^2 \cos^2 \tau} \, d\tau$$

$$\Rightarrow s(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \, t$$

$$\Rightarrow t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Por lo que, la ecuación de esta hélice, en términos del parámetro longitud de arco, es:

$$\vec{r}(s) = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \hat{i} + b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \hat{j} + a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \hat{k}$$

### **Vector tangente unitario**

Si "C" es una curva representada por la ecuación vectorial

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j} + z(t) \hat{k}$$

entonces la expresión

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = x'(t) \hat{i} + y'(t) \hat{j} + z'(t) \hat{k}$$

representa un vector tangente a la curva "C" en todos los puntos ordinarios y apunta en la dirección en que crece "t".

El vector

$$\bar{T} = \frac{\frac{d\bar{r}}{dt}}{\left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right|} = \frac{x'(t)\hat{i} + y'(t)\hat{j} + z'(t)\hat{k}}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}} = \frac{\frac{d\bar{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\bar{r}}{ds}$$

esto es,

$$\bar{T} = \frac{\frac{d\bar{r}}{dt}}{\left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right|} ; \quad \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt} ; \quad \bar{T} = \frac{d\bar{r}}{ds}$$

que representa un vector tangente unitario a la curva "C" en todos los puntos ordinarios y apunta en la dirección en la que crece "t".

**Ejemplo.** Obtener el vector tangente unitario, así como las ecuaciones de la recta tangente a la curva "C" definida por:

$$\bar{r}(t) = t\hat{i} + \text{sen}2t\hat{j} + \text{cos}2t\hat{k} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

en el punto donde  $t = \frac{\pi}{4}$

Teorema.

i) Una condición necesaria y suficiente para que un vector  $\bar{u}(t)$  sea de magnitud constante es que:

$$\bar{u}(t) \cdot \frac{d\bar{u}(t)}{dt} = 0$$

es decir, que  $\bar{u}(t)$  y  $\frac{d\bar{u}(t)}{dt}$  son ortogonales.

ii) Una condición necesaria y suficiente para que un vector  $\bar{u}(t)$  permanezca siempre paralelo a una recta dada es que:

$$\bar{u}(t) \times \frac{d\bar{u}(t)}{dt} = \bar{0}$$

es decir, que  $\bar{u}(t)$  y  $\frac{d\bar{u}(t)}{dt}$  son paralelos.

Prueba de (i).

Sea  $\bar{u}(t)$  de magnitud constante "k", luego,

$$|\bar{u}(t)| = k \Rightarrow \bar{u}(t) \cdot \bar{u}(t) = k^2$$

Si se deriva el producto escalar se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}(t) \cdot \bar{u}(t)}{dt} &= \bar{u}(t) \cdot \frac{d\bar{u}(t)}{dt} + \frac{d\bar{u}(t)}{dt} \cdot \bar{u}(t) = \frac{dk^2}{dt} \\ \Rightarrow 2\bar{u}(t) \cdot \frac{d\bar{u}(t)}{dt} &= 0 \Rightarrow \bar{u}(t) \cdot \frac{d\bar{u}(t)}{dt} = 0 \end{aligned}$$

Por otro lado, si  $|\bar{u}(t)|$  no fuera constante, entonces

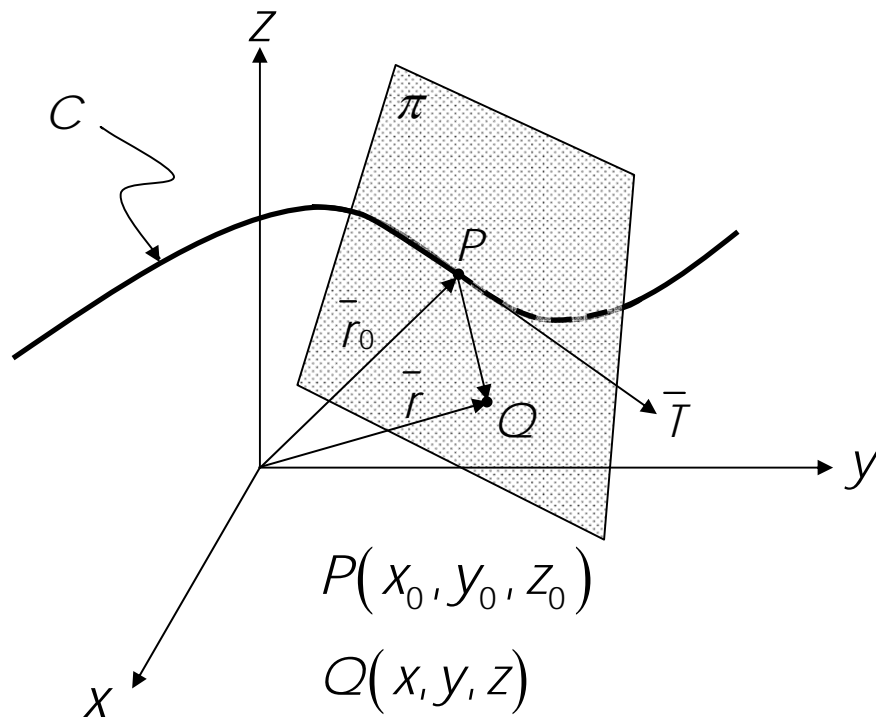
$\bar{u}(t) \cdot \frac{d\bar{u}(t)}{dt} \neq 0$ , lo que comprueba que la condición es necesaria y suficiente.

### Plano Normal

Sea una curva dada por sus ecuaciones paramétricas:

$$x = x(t) \quad ; \quad y = y(t) \quad ; \quad z = z(t)$$

Se desea obtener la ecuación del plano normal a la curva en el punto "P", es decir, el plano perpendicular al vector tangente unitario "T". Considérese la siguiente figura:



La ecuación del plano normal a la curva "C" es:

$$(\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot \bar{T} = 0$$

donde

$$\bar{r} - \bar{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$y \quad \bar{T} = \frac{(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))}{\sqrt{[x'(t_0)]^2 + [y'(t_0)]^2 + [z'(t_0)]^2}}$$

Luego

$$(\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot \bar{T} = \frac{x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0)}{\sqrt{[x'(t_0)]^2 + [y'(t_0)]^2 + [z'(t_0)]^2}}$$

Por lo que la ecuación del plano normal es:

$$\pi: x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$$



**Ejemplo.** Obtener la ecuación del plano normal a la curva de ecuaciones paramétricas:

$$x = t - \cos t$$

$$y = 3 + \operatorname{sen} 2t \quad \text{en el punto en que } t = \frac{\pi}{2}$$

$$z = 1 + \cos 3t$$

### Fórmulas de Frenet-Serret

Sea " $C$ " una curva parametrizada por  $\vec{r}(t)$  y sea " $s$ " el parámetro de longitud de arco. A cada punto de " $C$ " se asocian dos vectores unitarios muy importantes: el vector tangente unitario  $\vec{T}$ , que equivale a:

$$\bar{T} = \frac{\frac{d\bar{r}}{dt}}{\left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right|} = \frac{d\bar{r}}{ds} \text{ ya que } \frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right|$$

y el vector normal unitario  $\bar{N}$ , que se deducirá a continuación:

Como  $\bar{T}$  es unitario, su magnitud es constante; luego,  $\bar{T} \cdot \frac{d\bar{T}}{ds} = 0$ . Esto implica que existe un vector unitario

perpendicular a  $\bar{T}$  y por lo tanto, a la curva "C". A este vector se le denomina vector normal unitario y se define por:

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = k\bar{N} \text{ donde } k = \left| \frac{d\bar{T}}{ds} \right| \text{ (curvatura)}$$

$$\text{y } \rho = \frac{1}{k} = \frac{1}{\left| \frac{d\bar{T}}{ds} \right|} \text{ (radio de curvatura)}$$

**Ejemplo.** Verificar que el radio de curvatura, para la siguiente circunferencia, es "a".

$$\bar{r}(s) = a \cos \frac{s}{a} \hat{i} + a \sin \frac{s}{a} \hat{j}$$

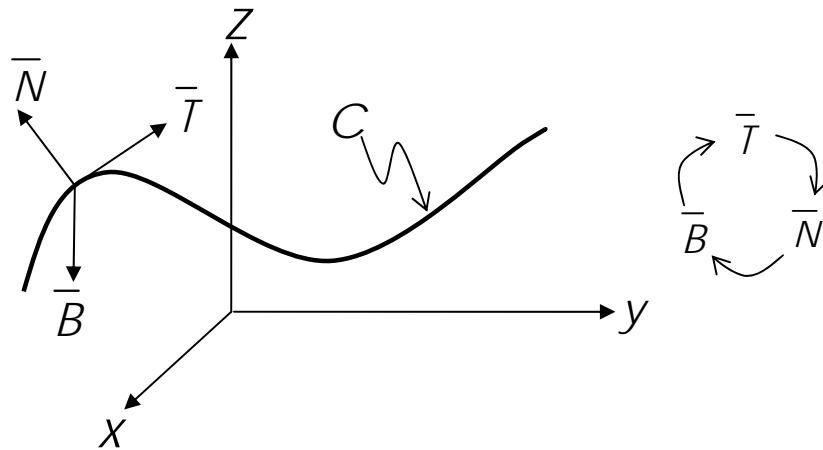
**Resolución.**

$$\bar{T} = \frac{d\bar{r}}{ds} = -\sin \frac{s}{a} \hat{i} + \cos \frac{s}{a} \hat{j}$$

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = -\frac{1}{a} \cos \frac{s}{a} \hat{i} - \frac{1}{a} \sin \frac{s}{a} \hat{j}$$

$$\Rightarrow k = \left| \frac{d\bar{T}}{ds} \right| = \frac{1}{a} \Rightarrow \rho = \frac{1}{k} \therefore \rho = a$$

Al vector unitario  $\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N}$  se le llama vector binormal unitario. Los vectores unitarios  $\bar{T}$ ,  $\bar{N}$  y  $\bar{B}$  constituyen un sistema coordenado ortogonal local en cada punto de la curva "C".



$\bar{T}$  y  $\bar{N}$  forman el plano osculador

$\bar{T}$  y  $\bar{B}$  forman el plano rectificador

$\bar{N}$  y  $\bar{B}$  forman el plano normal

Como  $\bar{B}$  es unitario,  $\frac{d\bar{B}}{ds}$ , si es diferente de cero, es perpendicular al vector  $\bar{B}$ . Si se deriva  $\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N}$  se tiene que:

$$\frac{d\bar{B}}{ds} = \frac{d\bar{T}}{ds} \times \bar{N} + \bar{T} \times \frac{d\bar{N}}{ds}$$

Como  $\frac{d\bar{T}}{ds} = k\bar{N}$  se llega a  $\frac{d\bar{B}}{ds} = k\bar{N} \times \bar{N} + \bar{T} \times \frac{d\bar{N}}{ds}$

Pero  $\bar{N} \times \bar{N} = \bar{0}$ ; luego  $\frac{d\bar{B}}{ds} = \bar{T} \times \frac{d\bar{N}}{ds}$

Como se observa,  $\frac{d\bar{B}}{ds} \perp \bar{T}$  y también a  $\bar{B}$ . Por lo tanto, debe ser paralelo a  $\bar{N}$ . Luego, se puede escribir que

$$\frac{d\bar{B}}{ds} = -\tau \bar{N} \quad \text{donde} \quad \boxed{|\tau| = \left| \frac{d\bar{B}}{ds} \right|}$$

$\tau$  recibe el nombre de coeficiente de torsión y  $\sigma = \frac{1}{\tau}$  se

conoce como radio de torsión.

Ahora, si se deriva  $\bar{N} = \bar{B} \times \bar{T}$ , se obtiene

$$\frac{d\bar{N}}{ds} = \frac{d\bar{B}}{ds} \times \bar{T} + \bar{B} \times \frac{d\bar{T}}{ds}$$

Como  $\frac{d\bar{B}}{ds} = -\tau \bar{N}$  y  $\frac{d\bar{T}}{ds} = k\bar{N}$ , entonces

$$\frac{d\bar{N}}{ds} = -\tau \bar{N} \times \bar{T} + \bar{B} \times k\bar{N} \Rightarrow \frac{d\bar{N}}{ds} = \tau \bar{B} - k\bar{T}$$

Al conjunto de ecuaciones:

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = k\bar{N}$$

$$\frac{d\bar{N}}{ds} = -k\bar{T} + \tau\bar{B}$$

$$\frac{d\bar{B}}{ds} = -\tau\bar{N}$$

se les conoce como **Fórmulas de Frenet Serret**

### Línea recta y curvatura

Como  $k = \left| \frac{d\bar{T}}{ds} \right|$ , entonces esta curvatura nunca es negativa.

Si  $k = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{T}}{ds} = \bar{0}$  y por lo tanto  $\bar{T}$  es un vector unitario con dirección constante y la curva es una línea recta.

Inversamente, para una línea recta,  $\bar{T}$  es constante y  $\frac{d\bar{T}}{ds} = \bar{0}$ .

Luego  $k = 0$ . Las únicas curvas con curvatura cero son las líneas rectas.

### Curva plana y torsión

La torsión  $\tau$  puede ser positiva o negativa y dependiendo de este signo, conforme la partícula recorre la curva en una dirección positiva, el sistema  $\overline{TNB}$  gira alrededor de  $\bar{T}$  en la misma forma que un tornillo de rosca derecha ( $\tau > 0$ ) o de

rosca izquierda ( $\tau < 0$ ). El signo de  $\tau$  es independiente de la elección de la dirección positiva en la curva.

si  $\tau = 0$ , entonces  $\frac{d\bar{B}}{ds} = \bar{0}$  y  $\bar{B}$  es un vector constante, lo que implica que la curva está contenida en un solo plano cuya normal es el vector constante  $\bar{B}$ .

Inversamente, para una curva plana,  $\bar{T}$  y  $\bar{N}$  siempre están en un plano fijo, mientras que  $\bar{B}$  es un vector normal unitario a ese plano. por lo tanto,  $\frac{d\bar{B}}{ds} = \bar{0}$  en todos los puntos para los cuales  $\bar{N}$  está definido ( $k \neq 0$ ) y  $\tau = 0$ .

Esto implica que las únicas curvas que tienen torsión nula son curvas planas.

**Ejemplo.** Calcular  $\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}, k, \rho, \tau, \sigma$  para la curva definida por la ecuación vectorial

$$\bar{r}(t) = a \cos t \hat{i} + bt \hat{j} + a \sin t \hat{k}$$



Deducción a partir de un parámetro  $t$  arbitrario

Sea  $\bar{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ . Si se deriva, se llega a:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

Pero  $\bar{T} = \frac{d\bar{r}}{ds}$ ; luego  $\boxed{\bar{r}' = s' \bar{T}}$

Si se deriva otra vez se tiene que:

$$\bar{r}'' = s'' \bar{T} + s' \frac{d\bar{T}}{dt} \Rightarrow \bar{r}'' = s'' \bar{T} + s' \frac{d\bar{T}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

Pero  $\frac{d\bar{T}}{ds} = k\bar{N}$ ; luego

$$\boxed{\bar{r}'' = s'' \bar{T} + (s')^2 k\bar{N}}$$

Y la tercera derivada será:

$$\bar{r}''' = s''' \bar{T} + s'' \frac{d\bar{T}}{dt} + \frac{d}{dt} \left[ (s')^2 k \right] \bar{N} + (s')^2 k \frac{d\bar{N}}{dt}$$



$$\bar{r}''' = s''' \bar{T} + s'' \frac{d\bar{T}}{ds} \frac{ds}{dt} + 2s' s'' k \bar{N} + (s')^2 k' \bar{N} + (s')^2 k \frac{d\bar{N}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

Y, como  $\frac{d\bar{T}}{ds} = k\bar{N}$  y  $\frac{d\bar{N}}{ds} = -k\bar{T} + \tau\bar{B}$ , entonces

$$\bar{r}''' = s''' \bar{T} + ks'' s' \bar{N} + 2ks'' s' \bar{N} + (s')^2 k' \bar{N} - (s')^3 k^2 \bar{T} + (s')^3 k\tau \bar{B}$$

Si se agrupan los términos con respecto a  $\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}$  se tiene que:

$$\boxed{\bar{r}''' = \left[ s''' - k^2 (s')^3 \right] \bar{T} + \left[ 3ks'' s' + k' (s')^2 \right] \bar{N} + (s')^3 k\tau \bar{B}}$$

Si se efectúa el producto  $\bar{r}' \times \bar{r}''$  se llega a:

$$\bar{r}' \times \bar{r}'' = \begin{vmatrix} \bar{T} & \bar{N} & \bar{B} \\ s' & 0 & 0 \\ s'' & (s')^2 k & 0 \end{vmatrix} = (s')^3 k \bar{B}$$

Si se toma el valor absoluto, esto es, la magnitud, se obtiene:

$$|\bar{r}' \times \bar{r}''| = (s')^3 k$$

de donde:

$$\boxed{k = \frac{|\bar{r}' \times \bar{r}''|}{(s')^3} \Rightarrow k = \frac{|\bar{r}' \times \bar{r}''|}{|\bar{r}'|^3} \text{ y } \rho = \frac{1}{k}}$$

Si ahora se efectúa el producto  $\bar{r}' \times \bar{r}'' \cdot \bar{r}'''$  se obtiene el siguiente resultado:

$$\bar{r}' \times \bar{r}'' \cdot \bar{r}''' = (s')^6 k^2 \tau \quad \Rightarrow \quad \bar{r}' \times \bar{r}'' \cdot \bar{r}''' = (s')^6 \frac{|\bar{r}' \times \bar{r}''|^2}{(s')^6} \tau$$

$$\boxed{\tau = \frac{\bar{r}' \times \bar{r}'' \cdot \bar{r}'''}{|\bar{r}' \times \bar{r}''|^2} \quad y \quad \sigma = \frac{1}{\tau}}$$

Y si se efectúa el producto  $(\bar{r}' \times \bar{r}'') \times \bar{r}'$  se tiene que:

$$(\bar{r}' \times \bar{r}'') \times \bar{r}' = \begin{vmatrix} \bar{T} & \bar{N} & \bar{B} \\ 0 & 0 & (s')^3 k \\ s' & 0 & 0 \end{vmatrix} = (s')^4 k \bar{N}$$

Si la dirección positiva de la curva es en el sentido en que crece " t ",  $s' = \frac{ds}{dt} > 0$  y las ecuaciones precedentes muestran

que  $\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}$  tienen las direcciones de

$$\bar{r}', \bar{r}' \times \bar{r}'', (\bar{r}' \times \bar{r}'') \times \bar{r}',$$

respectivamente. Así se llega a las expresiones

$$\boxed{\bar{T} = \frac{\bar{r}'}{|\bar{r}'|}} \quad ; \quad \boxed{\bar{B} = \frac{\bar{r}' \times \bar{r}''}{|\bar{r}' \times \bar{r}''|}} \quad ; \quad \boxed{\bar{N} = \frac{(\bar{r}' \times \bar{r}'') \times \bar{r}'}{|(\bar{r}' \times \bar{r}'') \times \bar{r}'|}}$$

**Ejemplo.** Obtener  $\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}, k, \rho, \tau, \sigma$  para la curva cuya ecuación vectorial es:

$$\bar{r}(t) = \cos t \hat{i} + \sin t \hat{j} + \sin t \hat{k}$$

**Ejemplo.** Verificar que la curva, cuya ecuación vectorial es la siguiente, es una curva plana:

$$\bar{r}(t) = 6 \operatorname{sent} t \hat{i} + 4 \operatorname{sent} t \hat{j} + 2 \cos t \hat{k}$$

**Solución.** Se obtienen las dos primeras derivadas:

$$\bar{r}'(t) = 6 \cos t \hat{i} + 4 \cos t \hat{j} - 2 \operatorname{sent} t \hat{k}$$

$$\bar{r}''(t) = -6 \operatorname{sent} t \hat{i} - 4 \operatorname{sent} t \hat{j} - 2 \cos t \hat{k}$$

Se efectúa el producto cruz de estos vectores y se llega a:

$$\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 \cos t & 4 \cos t & -2 \operatorname{sent} t \\ -6 \operatorname{sent} t & -4 \operatorname{sent} t & -2 \cos t \end{vmatrix}$$

$$= (-8 \cos^2 t - 8 \operatorname{sen}^2 t) \hat{i} - (-12 \cos^2 t - 12 \operatorname{sen}^2 t) \hat{j} \\ + (-24 \operatorname{sen} t \cos t + 24 \operatorname{sen} t \cos t) \hat{k} \\ \bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) = -8 \hat{i} + 12 \hat{j} \Rightarrow |\bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t)| = 4\sqrt{13}$$

El vector binormal  $\bar{B}$  está dado por:

$$\bar{B} = \frac{\bar{r}' \times \bar{r}''}{|\bar{r}' \times \bar{r}''|} \Rightarrow \bar{B} = -\frac{2}{\sqrt{13}} \hat{i} + \frac{3}{\sqrt{13}} \hat{j}$$

que, como se observa, es un vector de magnitud constante, por lo que a curva está contenida en un plano cuyo vector normal es  $\bar{B}$ .

Para representarla gráficamente, se sugiere la siguiente tabulación:

$$x = 6 \operatorname{sen} t \quad ; \quad y = 4 \operatorname{sen} t \quad ; \quad z = 2 \cos t$$

$t$	$x$	$y$	$z$
$0$	$0$	$0$	$2$
$\frac{\pi}{4}$	$4.24$	$2.83$	$1.41$
$\frac{\pi}{2}$	$6$	$4$	$0$
$\frac{3\pi}{4}$	$4.24$	$2.83$	$-1.41$
$\pi$	$0$	$0$	$-2$
$\frac{5\pi}{4}$	$-4.24$	$-2.83$	$-1.41$
$\frac{3\pi}{2}$	$-6$	$-4$	$0$
$\frac{7\pi}{4}$	$-4.24$	$-2.83$	$1.41$
$2\pi$	$0$	$0$	$2$

## Cinemática de una partícula

**Definición.** Sea  $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$  el vector de posición de una partícula en movimiento con respecto a algún sistema de referencia, con el tiempo "t" como parámetro. Entonces la velocidad y la aceleración de la partícula con respecto a dicho sistema se definen como las derivadas de  $\vec{r}(t)$  con respecto al tiempo. De esta forma se puede escribir que:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = x'(t)\hat{i} + y'(t)\hat{j} + z'(t)\hat{k}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = x''(t)\hat{i} + y''(t)\hat{j} + z''(t)\hat{k}$$

Al módulo de la velocidad de le llama rapidez y se denota como  $v = |\vec{v}|$

Por otra parte, se puede escribir que:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad ; \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} \quad ; \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$$

$$\vec{v} = v\vec{T}$$

lo que implica que el vector velocidad de la partícula siempre es tangente a la curva y tiene la dirección del movimiento.

Si se deriva la expresión anterior  $\vec{v} = v\vec{T}$  se obtiene:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \bar{T} + v \frac{d\bar{T}}{dt} \quad ; \quad \bar{a} = \frac{dv}{dt} \bar{T} + v \frac{d\bar{T}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

y como  $\frac{d\bar{T}}{ds} = k\bar{N} = \frac{\bar{N}}{\rho}$  se tiene que:

$$\boxed{\bar{a} = \frac{dv}{dt} \bar{T} + \frac{v^2}{\rho} \bar{N}}$$

Esto implica que la aceleración de la partícula es un vector situado en el plano de la tangente y la normal a la curva (plano osculador), con componentes tangencial y normal dadas respectivamente por:

$$\boxed{\frac{dv}{dt} \quad y \quad \frac{v^2}{\rho}}$$

La aceleración será únicamente tangencial cuando el movimiento sea rectilíneo ( $\rho \rightarrow \infty$ ) y será únicamente normal cuando la rapidez sea constante  $\left(\frac{dv}{dt} = 0\right)$ .

**Ejemplo.** Obtener la velocidad, la aceleración y la rapidez de una partícula que se mueve sobre la curva de ecuación  $\bar{r}(t) = 2t^2 \hat{i} - t^3 \hat{j} + (t+1)^2 \hat{k}$  cuando pasa por el punto  $(2, -1, 4)$ . También calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración, expresarlas en términos de los vectores  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  y realizar las comprobaciones correspondientes.



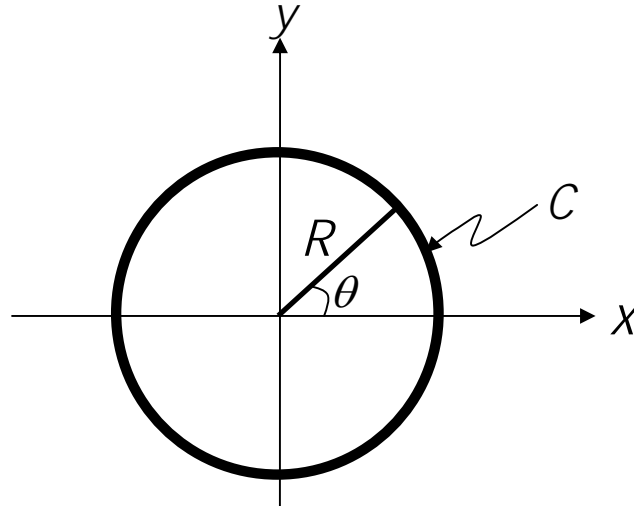


La curvatura y la torsión, en términos de la velocidad y la aceleración, se expresan como:

$$k = \frac{|\bar{v} \times \bar{a}|}{|\bar{v}|^3} \quad ; \quad \tau = \frac{\bar{v} \times \bar{a} \cdot \dot{\bar{a}}}{|\bar{v} \times \bar{a}|^2} \quad \text{donde} \quad \dot{\bar{a}} = \frac{d\bar{a}}{dt}$$

## Movimiento circular

Considérese la siguiente figura:



La rapidez angular  $\omega$  y el módulo de la aceleración angular  $\alpha$  de una partícula en movimiento circular se definen como las siguientes derivadas con respecto al tiempo:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad y \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Por otra parte, se sabe que la relación entre el ángulo  $\theta$  y el parámetro longitud de arco está dada por:

$$s = R\theta$$

Si se deriva esta expresión se tiene que:  $\frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}$

Pero  $\frac{ds}{dt} = \text{rapidez} = v$       y       $\frac{d\theta}{dt} = \omega$

por lo que

$$v = R\omega$$

Y si se deriva esta ecuación se llega a:

$$\frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt}$$

Aquí se observa que  $\frac{dv}{dt}$  es la magnitud de la componente tangencial de la aceleración y  $\frac{d\omega}{dt}$  es la magnitud  $\alpha$  de la aceleración angular. Por lo tanto  $a_T = R\alpha$ . Como se sabe, la componente normal de la aceleración está dada por  $\frac{v^2}{R}$ . Esto puede ser expresado en términos de la velocidad angular como:

$$a_N = \frac{R^2 \omega^2}{R} \Rightarrow a_N = R\omega^2$$

luego, la aceleración en el movimiento circular se expresa como:

$$\boxed{\bar{a} = (R\alpha)\bar{T} + (R\omega^2)\bar{N}}$$

donde  $R$  es el radio de la circunferencia, que es la trayectoria del movimiento circular.

**Ejemplo.** Un niño juega con una pelota que está unida a un hilo. El niño la hace girar con una velocidad constante (velocidad angular) de 3 revoluciones por segundo y el hilo tiene una longitud de  $0.5 \text{ m}$ . Si se considera que la pelota tiene una masa de  $0.3 \text{ Kg}$  y que el peso del hilo es despreciable, calcular la fuerza ejercida por la pelota sobre el cable.

**Solución.** De la tercera ley de Newton, a toda acción corresponde una fuerza de reacción igual en magnitud y de

sentido contrario. Asimismo, la fuerza con la que se mueve la pelota está dada por la segunda ley de Newton:  $\bar{F} = m\bar{a}$ . Por la expresión obtenida anteriormente, la aceleración de la pelota en movimiento circular está dada por:

$$\boxed{\bar{a} = (R\alpha)\bar{T} + (R\omega^2)\bar{N}}$$

donde

$$\omega = 3 \frac{rev}{s} = 18.85 \frac{rad}{s} \quad ; \quad R = 0.5 \text{ m} \quad ; \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0$$

luego

$$\bar{a} = (0.5)(18.85)^2 \bar{N} \Rightarrow \bar{a} = 177.66 \bar{N}$$

por lo que la fuerza que ejerce el hilo sobre la pelota es

$$\bar{F} = m\bar{a} \Rightarrow \bar{F} = 0.3(177.66) \bar{N} \therefore \bar{F} = 53.3 \bar{N}$$

Esto es, que el hilo tira de la pelota con una fuerza de  $53.3 \text{ kg} \frac{m}{s^2}$  en dirección de la normal, o sea, hacia el centro del círculo.

### Ejemplos diversos de cinemática

Ejemplo. Calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración de una partícula que se mueve en la hélice de ecuación:

$$\bar{r}(t) = (\cos t)\hat{i} + (\sin t)\hat{j} + t\hat{k}$$

Solución.

$$\begin{aligned} \bar{v}(t) &= \bar{r}'(t) = (-\sin t)\hat{i} + (\cos t)\hat{j} + \hat{k} \\ v &= |\bar{v}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} \Rightarrow v = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\therefore a_T = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\bar{a}(t) = \bar{r}''(t) = (-\cos t)\hat{i} - (\sin t)\hat{j}$$

$$\Rightarrow a = |\bar{a}(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} \Rightarrow a = 1$$

por lo que  $a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} \therefore a_N = 1$

**Ejemplo.** Calcular la fuerza que actúa sobre un objeto de masa "  $m$ " que se mueve en la trayectoria elíptica:

$$\bar{r}(t) = (\alpha \cos \omega t)\hat{i} + (\beta \sin \omega t)\hat{j} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Solución.

$$\bar{F} = m\bar{a}$$

$$\bar{v}(t) = (-\alpha\omega \sin \omega t)\hat{i} + (\beta\omega \cos \omega t)\hat{j}$$

$$\bar{a}(t) = (-\alpha\omega^2 \cos \omega t)\hat{i} - (\beta\omega^2 \sin \omega t)\hat{j}$$

de donde

$$\bar{F}(t) = -m(\alpha\omega^2 \cos \omega t)\hat{i} - m(\beta\omega^2 \sin \omega t)\hat{j}$$

$$\therefore \bar{F}(t) = -m\omega^2 \bar{r}(t)$$

**Ejercicio de tarea.** Una partícula se mueve a lo largo de la curva  $\bar{r}(t) = (t^3 - 4t)\hat{i} + (t^2 + 4t)\hat{j} + (8t^2 - 3t^3)\hat{k}$ . En el punto donde  $t = 2$ , calcular la velocidad, la rapidez, la aceleración, las componentes tangencial y normal de la aceleración, estas componentes en términos de  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  y determinar el módulo de la aceleración. Realizar las comprobaciones correspondientes.

Soluciones:

$$\bar{v} = 8\hat{i} + 8\hat{j} - 4\hat{k} \quad ; \quad v = 12$$

$$\bar{a} = 12\hat{i} + 2\hat{j} - 20\hat{k} \quad ; \quad \bar{a} = 16\bar{T} + 17.1\bar{N}$$

$$a_T = 16 \quad ; \quad \bar{a}_T = 10.67\hat{i} + 10.67\hat{j} - 5.33\hat{k}$$

$$a_N = 17.1 \quad ; \quad \bar{a}_N = 1.33\hat{i} - 8.67\hat{j} - 14.68\hat{k} \quad ; \quad a = 23.41$$

### Ecuación vectorial de una superficie

Sea  $\bar{F}(u, v)$  una función vectorial de variable vectorial dada por:

$$\bar{F}(u, v) = f_1(u, v)\hat{i} + f_2(u, v)\hat{j} + f_3(u, v)\hat{k}$$

donde  $f_1, f_2, f_3$  son funciones escalares de las variables  $u$  y  $v$ . Entonces, para cada valor de  $u$  y de  $v$  existe un vector de posición

$$\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

que especifica un punto "P" del espacio  $\mathbb{R}^3$ . Cuando  $u$  y  $v$  varían, el punto "P" se mueve y forma una superficie "S", de tal forma que:

$$x = f_1(u, v) \quad ; \quad y = f_2(u, v) \quad ; \quad z = f_3(u, v)$$

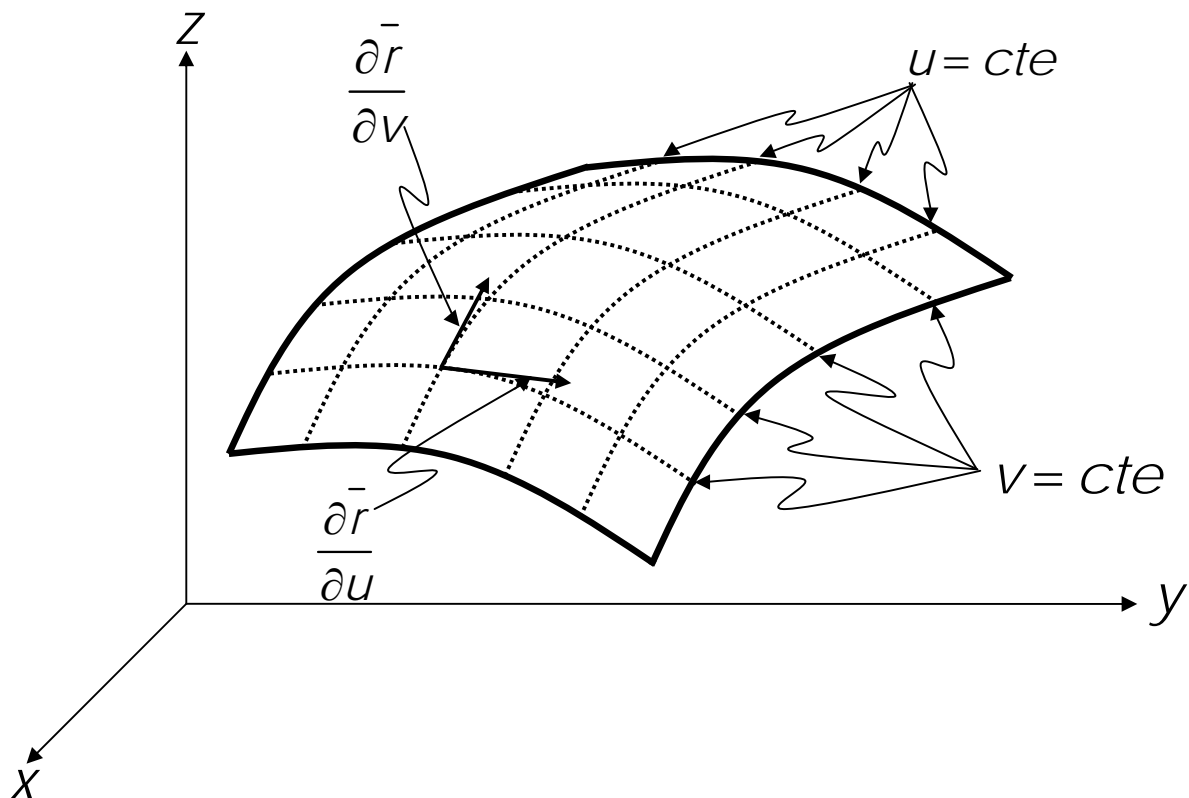
Estas ecuaciones se denominan "ecuaciones paramétricas de la superficie "S" en  $\mathbb{R}^3$  y constituyen la función  $\bar{F}(u, v)$  con parámetros  $u$  y  $v$ .

Si se fija  $V = C$  (constante), entonces las expresiones anteriores tendrán un solo parámetro y describirán una curva en el espacio a lo largo de la cual varía " $U$ ". A esta curva se le designa con  $V = C$ . Así, para cada valor de " $V$ ", existe una curva en el espacio.

De modo similar, " $V$ " varía a lo largo de la curva  $U = k$ .

El lugar geométrico de todas las curvas  $V = C$  y  $U = k$  constituye una superficie, como se observa en la siguiente gráfica siguiente donde se señalan también, para un punto determinado de la superficie, los vectores:

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \quad y \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$$



Los parámetros  $u$  y  $v$  se conocen como "coordenadas curvilíneas" del punto " $P$ " sobre la superficie y las curvas  $v = c$  y  $u = k$  se denominan "curvas paramétricas".

Si el punto terminal del vector de posición  $\vec{r}$  genera la superficie " $S$ ", entonces su ecuación vectorial se puede escribir como:

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k}$$

**Ejemplo.** Trazar la gráfica de la superficie de ecuación

$$\vec{r}(u, v) = u\hat{i} + v\hat{j} + (u^2 + v^2)\hat{k} \quad ; \quad u \in \mathbb{R} \quad ; \quad v \in \mathbb{R}$$

e identificarla. Determinar su ecuación cartesiana.

**Solución.**



**Ejemplo.** Trazar la gráfica de la superficie definida por la ecuación siguiente e identificarla:

$$\vec{r}(u, v) = a \cos u \operatorname{sen} v \hat{i} + a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \hat{j} + a \cos v \hat{k}$$

$$0 \leq u \leq 2\pi \quad ; \quad 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$$

Obtener su ecuación cartesiana.

**Solución.** Si se fija  $v$  como constante, esto es,  $v = v_0$ , entonces

$$\operatorname{sen} v = c_1 \quad ; \quad \cos v = c_2$$

y  $\vec{r}$  representa a la curva:

$$\vec{r}(u, v_0) = a c_1 \cos u \hat{i} + a c_1 \operatorname{sen} u \hat{j} + a c_2 \hat{k}$$

que es una circunferencia horizontal situada en el plano  $z = a c_2$  con radio  $r = a c_1$  y con centro sobre el eje "z".

Además, como se cumple que  $z^2 + r^2 = a^2$ , es decir, que  $a^2 c_2^2 + a^2 c_1^2 = a^2$ , el radio de estas circunferencias horizontales varía al variar la "z" de acuerdo con la ecuación de una circunferencia vertical de radio "a" con centro en  $z = 0$ . Por lo que la superficie que se genera es una esfera centrada en el origen y las curvas  $v = v_0$  son los círculos llamados paralelos.

Del mismo modo, si se fija "U" como constante, esto es,  $U = U_0$ , entonces

$$\cos u = k_1 \quad ; \quad \operatorname{sen} u = k_2$$

por lo que  $\bar{r}$  representa a la curva

$$\bar{r}(u_0, v) = ak_1 \operatorname{sen} v \hat{i} + ak_2 \operatorname{sen} v \hat{j} + a \cos v \hat{k}$$

que también se puede escribir como

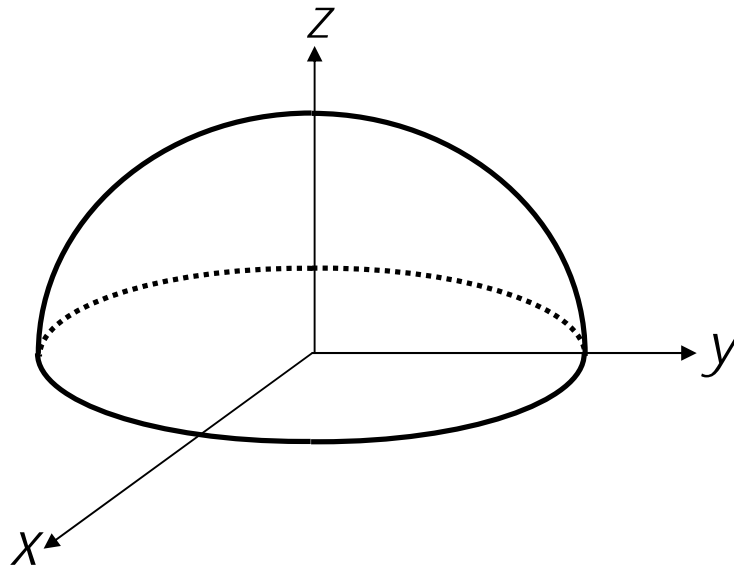
$$\bar{r}(u_0, v) = a \left( k_1 \hat{i} + k_2 \hat{j} \right) \operatorname{sen} v + a \cos v \hat{k}$$

$$\Rightarrow \bar{r}(u_0, v) = a \operatorname{sen} v \hat{e} + a \cos v \hat{k}$$

En esta expresión se observa que  $\bar{e} = k_1 \hat{i} + k_2 \hat{j}$  es un vector unitario horizontal. De esta forma expresada  $\bar{r}(u_0, v)$ , se trata de una circunferencia de radio "a" situada en el plano vertical definido por  $\hat{e}$  y  $\hat{k}$ , y con centro en el origen. Cuando  $u_0$

varía, el vector  $\hat{e}$  gira horizontalmente pero la curva generada sigue siendo una circunferencia de radio "a". De esta forma se genera nuevamente la esfera de radio "a" con centro en el origen.

Como  $0 \leq u \leq 2\pi$  y  $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$  la superficie es la mitad de una esfera, como se observa en la figura:



Para obtener la ecuación cartesiana de la esfera, se elevan al cuadrado  $x, y, z$  y se suman, con lo que se llega a:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad ; \quad z \geq 0$$

Problema. Calcular el ángulo de intersección entre la superficie "S" y la curva "C", cuyas ecuaciones vectoriales son:

$$S: \quad \bar{r}_1(u, v) = (u + 2v)\hat{i} + 5uv\hat{j} + (v - 2u)\hat{k}$$

$$C: \quad \bar{r}_2(t) = (3 - 3t)\hat{i} + (5 - 5t - 10t^2)\hat{j} + (-4t - 1)\hat{k}$$

en el punto donde  $v = 1$ .

### Puntos ordinarios y puntos singulares. Superficies suaves

Definición. El vector  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$  es perpendicular al plano formado por estos vectores; y el hecho de que este producto

vectorial sea diferente de cero, es decir,  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \neq \bar{0}$  en un punto determinado, asegura la existencia de un plano tangente en dicho punto.

Definición. A los puntos en donde existe plano tangente, esto es, donde se cumple la condición  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \neq \bar{0}$ , se les conoce como puntos ordinarios.

Definición. A la superficie formada únicamente por puntos ordinarios, se le conoce como superficie suave.

Definición. A los puntos donde se cumple que  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \bar{0}$  se les conoce como puntos singulares.

**Ejemplo.** Obtener una ecuación para el plano tangente a la superficie dada en el punto especificado y determinar si se trata de una superficie suave

$$\bar{r}(u, v) = (2 - \cos v) \cos u \hat{i} + (2 - \cos v) \sin u \hat{j} + \sin v \hat{k}$$

Para  $-\pi \leq u \leq \pi$  ;  $-\pi \leq v \leq \pi$  en el punto donde

$$u = \frac{\pi}{2} \quad y \quad v = 0$$

Solución. Como se sabe,  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$  y  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$  son vectores tangentes a la superficie dada, por lo que un vector normal a la superficie se obtiene al efectuar el producto vectorial de dichos vectores. así,

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = -(2 - \cos v) \operatorname{sen} u \hat{i} + (2 - \cos v) \cos u \hat{j}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \operatorname{sen} v \cos u \hat{i} + \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u \hat{j} + \cos v \hat{k}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -(2 - \cos v) \operatorname{sen} u & (2 - \cos v) \cos u & 0 \\ \operatorname{sen} v \cos u & \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u & \cos v \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = (2 - \cos v) \left( \cos u \cos v \hat{i} + \operatorname{sen} u \cos v \hat{j} - \operatorname{sen} v \hat{k} \right)$$

Como se observa, para ningún valor de  $u$  y  $v$  el producto vectorial anterior se cancela, lo que demuestra que la superficie es suave.

$$\begin{aligned} u &= \frac{\pi}{2} \\ v &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \hat{j}$$

y el punto donde el anterior vector es normal es:

$$\bar{r} \left( \frac{\pi}{2}, 0 \right) = (0, 1, 0)$$

Por lo tanto, la ecuación del plano tangente a la superficie dada, en el punto  $(0, 1, 0)$  está dada por

$$0(x-0) + 1(y-1) + 0(z-0) = 0 \quad \therefore \quad y=1$$

**Ejemplo.** Considérese la ecuación vectorial del cono

$$\vec{r}(u, v) = u \cos v \hat{i} + u \sin v \hat{j} + u \hat{k} \quad ; \quad u \geq 0$$

Verificar que el origen de coordenadas es un punto singular de la superficie.

### **Divergencia, rotacional y laplaciano**

Gran parte de las ecuaciones diferenciales que aparecen en la física matemática surgen como modelos matemáticos de fenómenos físicos en donde intervienen los “operadores” que aquí se estudiarán.

Considérese el campo vectorial

$$\vec{F} = f_1(x, y, z) \hat{i} + f_2(x, y, z) \hat{j} + f_3(x, y, z) \hat{k}$$

Su matriz jacobiana es:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Con sus elementos se forman dos importantes combinaciones matemáticas que son las siguientes:

**Definición.** La divergencia del campo vectorial  $\bar{F}$ , que es un campo escalar, se define y denota como:

$$\boxed{\text{div}(\bar{F}) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}}$$

Se puede ver que se trata de la traza de la matriz jacobiana. Para denotarla se escribe como:

$$\begin{aligned} \text{div}(\bar{F}) &= \bar{\nabla} \cdot \bar{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \\ \bar{\nabla} \cdot \bar{F} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot \left( f_1 \hat{i} + f_2 \hat{j} + f_3 \hat{k} \right) \end{aligned}$$

(en sentido estricto, no es un producto punto)

**Definición.** El rotacional del campo vectorial  $\bar{F}$ , que es un campo vectorial, se define y denota como:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\bar{F}) &= \bar{\nabla} \times \bar{F} = \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \hat{i} - \left( \frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \hat{k} \\ \bar{\nabla} \times \bar{F} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(en sentido estricto, no es un producto vectorial)

Ejemplo. Obtener la divergencia y el rotacional del campo vectorial:

$$\vec{F} = 5x^3y^2 \hat{i} - 4xy^3 \hat{j} + 2x^4y^4 \hat{k}$$

### Divergencia. Propiedades y algunas aplicaciones

Considérese a  $\vec{v}(x, y, z)$  como el campo de velocidades de un fluido en movimiento en un punto cualquiera " $P$ ". Entonces, la divergencia de  $\vec{v}$ , denotada por  $\nabla \cdot \vec{v}$  se interpreta como el incremento total de volumen por unidad de volumen y de tiempo, es decir, que la divergencia representa la razón de expansión del fluido por unidad de volumen.

Se puede decir que el nombre de divergencia viene de diferencia en el volumen.



Propiedades. Sean  $\vec{F}$  y  $\vec{G}$  funciones vectoriales y  $\phi$  una función escalar, las tres diferenciables en cualquier punto  $(x, y, z)$  que pertenece a una región "R" del espacio.

Entonces se cumple que:

$$i) \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$$

$$ii) \quad \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{F}) = \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{F}$$

$$iii) \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G})$$

La divergencia es útil en problemas de mecánica, en el flujo de fluidos y en electromagnetismo, por citar algunos.

Ahora se definirá un campo vectorial muy importante en diversas ramas de la ciencia:

Sea  $\vec{F}$  un campo vectorial. Entonces, si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$  es positiva en el entorno de un cierto punto "P", ello significa que el flujo saliente de "P" es positivo y así a este punto se le conoce como surgente o manantial. Si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$  es negativa en el entorno de "P", se le llama punto sumidero.

Si en una región no hay manantiales ni sumideros, entonces  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$  y se dice que  $\vec{F}$  es un campo solenoidal.

**Ejemplo.** Supóngase que "R" es el radio de la tierra, "O" su centro y "g" la aceleración debida a la gravedad en su superficie. Si "P" es un punto del espacio próximo a la superficie, se designa con  $\vec{r}$  al vector cuyo representante es el segmento dirigido  $\overline{OP}$ . A la longitud  $|\vec{r}|$  se le denotará con "r".

Por la física clásica, se sabe que el campo vectorial  $\vec{v}(P)$  debido a la gravedad (llamado el campo gravitacional de la tierra) está dado aproximadamente por la expresión:

$$\vec{v}(P) = -\frac{gR^2}{r^3} \vec{r}$$

Demostrar que para  $r > R$  este campo es solenoidal.

En la mecánica de los fluidos, la divergencia tiene grandes aplicaciones.

**Ejemplo.** En la ecuación de continuidad de la dinámica de los fluidos, que es:

$$\bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

si el fluido es incompresible, la densidad es constante y por lo tanto, el campo  $\bar{v}$  es solenoidal. En efecto:

$$\rho = \text{constante} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad y \quad \bar{\nabla} \rho = 0$$

de donde

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot (\rho \bar{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \rho \bar{\nabla} \cdot \bar{v} + \bar{\nabla} \rho \cdot \bar{v} = \rho \bar{\nabla} \cdot \bar{v} = 0 \\ \therefore \bar{\nabla} \cdot \bar{v} &= 0 \end{aligned}$$

**Ejemplo.** Dos de las leyes fundamentales de Maxwell están en función de la divergencia y son:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \quad y \quad \bar{\nabla} \cdot \bar{D} = \rho$$

La primera expresa que la densidad de flujo magnético es un campo solenoidal, lo que implica que las líneas de campo magnético son cerradas, lo cual a su vez implica que los polos magnéticos aislados no existen. La segunda ecuación expresa que la divergencia de la densidad de flujo eléctrico es igual a densidad de carga eléctrica.

**Ejemplo.** Determinar el valor de la constante "b" de tal forma que el campo vectorial siguiente sea solenoidal:

$$\bar{v} = (x + 3y)\hat{i} + (y - 2z)\hat{j} + (x + bz)\hat{k}$$

## Rotacional. Propiedades y algunas aplicaciones

Cuando se habla de un cierto flujo, se dice que además del campo de aceleraciones, existe otro campo vectorial derivado del de velocidades que es el rotacional, que es una medida de la rotación o vorticidad local de una partícula dentro del flujo. Y es por esta razón que al rotacional se le conoce también como campo vorticoso.

Propiedades. Sean  $\bar{F}$  y  $\bar{G}$  funciones vectoriales y  $\phi$  una función escalar, las tres diferenciables en cualquier punto  $(x, y, z)$  que pertenece a una región "R" del espacio. Entonces se cumple que:

$$i) \quad \bar{\nabla} \times (\bar{F} + \bar{G}) = \bar{\nabla} \times \bar{F} + \bar{\nabla} \times \bar{G}$$

$$ii) \quad \bar{\nabla} \times (\phi \bar{F}) = (\bar{\nabla} \phi) \times \bar{F} + \phi (\bar{\nabla} \times \bar{F})$$

$$iii) \quad \bar{\nabla} \times (\bar{F} \times \bar{G}) = (\bar{G} \cdot \bar{\nabla}) \bar{F} - (\bar{\nabla} \cdot \bar{F}) \bar{G} - (\bar{F} \cdot \bar{\nabla}) \bar{G} + (\bar{\nabla} \cdot \bar{G}) \bar{F}$$

donde

$$(\bar{G} \cdot \bar{\nabla}) \bar{F} = g_1 \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + g_2 \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} + g_3 \frac{\partial \bar{F}}{\partial z}$$

$$(\bar{F} \cdot \bar{\nabla}) \bar{G} = f_1 \frac{\partial \bar{G}}{\partial x} + f_2 \frac{\partial \bar{G}}{\partial y} + f_3 \frac{\partial \bar{G}}{\partial z}$$

El rotacional de un campo  $\vec{V}$  de velocidades de un fluido es una medida de la rotación de una partícula al moverse en dicho fluido.

El rotacional es importante en el análisis de los campos de velocidad de la dinámica de los fluidos y en los análisis de campos de fuerza electromagnética.

El rotacional puede interpretarse como la medición del movimiento angular de un fluido y la condición  $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$  para un campo de velocidades  $\vec{V}$  caracteriza lo que se conoce como flujo irrotacional. Esto significa que la corriente del fluido está libre de vórtices o remolinos.

La ecuación análoga  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$  para el vector de fuerza eléctrica  $\vec{E}$  rige cuando solamente existen fuerzas electrostáticas.

Cuando se estudia en la mecánica al trabajo y la energía se dice que una fuerza  $\vec{F}$  es conservativa cuando  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$  donde  $\vec{F}$  se puede expresar como el gradiente de una función escalar  $\phi$ . Esto es,  $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$ . Y para este caso, a  $\phi$  se le denomina potencial o energía potencial.

Por todo lo anterior, se dice que un campo es irrotacional o conservativo, si se cumple que su rotacional es cero.

**Ejemplo.** La ley de Hooke establece que una fuerza elástica  $\vec{F}$  es directamente proporcional al vector desplazamiento  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  de la partícula sobre la cual actúa, es decir,

$\vec{F} = -k\vec{r}$ . Verificar que en esta expresión  $\vec{F}$  es una fuerza conservativa.

**Ejemplo.** Obtener los valores de las constantes  $a, b, c$  de manera que el siguiente campo sea irrotacional:

$$\vec{v} = (x + 2y + az)\hat{i} + (bx - 3y - z)\hat{j} + (4x + cy + 2z)\hat{k}$$

## Cuadro resumen

Concepto	Se aplica a	Da por resultado
Gradiente	Campo escalar	Campo vectorial
Gradiente	Campo vectorial	Matriz
Divergencia	Campo vectorial	Campo escalar
Rotacional	Campo vectorial	Campo vectorial

## Invariantes de segundo orden. Laplaciano

Existen también los llamados invariantes de segundo orden que son:

Divergencia de un gradiente

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \phi) = \nabla^2 \phi \quad (\text{laplaciano})$$

Rotacional de un gradiente  $\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \phi)$

Gradiente de una divergencia  $\bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{F})$

Divergencia de un rotacional  $\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{F})$

Rotacional de un rotacional  $\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{F})$

Supóngase que  $\bar{F}$  es el gradiente de un campo escalar  $\phi$ , esto es:

$$\bar{F} = \bar{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k}$$

Entonces su matriz jacobiana está dado por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

A la traza de esta matriz se le llama Laplaciano de  $\phi$  y se representa con  $lap(\phi)$  o bien  $\nabla^2 \phi$ . Así,

$$lap(\phi) = \nabla^2 \phi = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

Al símbolo  $\nabla^2$  se le llama "operador laplaciano" y se expresa como:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Cuando las parciales mixtas son continuas, los elementos simétricos de la diagonal principal son iguales y por lo tanto el rotacional de  $\bar{F}$  es nulo, es decir, que:

$$\bar{\nabla} \times \bar{F} = \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \phi) = \bar{0}$$

y por lo tanto, esto se cumple para todo campo escalar  $\phi$  con derivadas parciales segundas continuas.

Cuando el laplaciano es cero, es decir, cuando  $\nabla^2 \phi = 0$ , se dice que  $\phi$  es una función armónica.



Tarea. Probar que la función  $\frac{1}{|\vec{r}|}$ , en la cual

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

es una función armónica para todo valor de  $r$  ;  $r \neq 0$ .

A la expresión  $\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$  se le llama

“Ecuación de Laplace”. Esta ecuación surge en problemas de determinación de temperatura en los estados estacionarios, potencial electrostático, flujo de fluidos en los estados estacionarios, etcétera.

El operador  $\nabla^2$  puede aplicarse a un campo vectorial como sigue:

$$\nabla^2 \vec{F} = (\nabla^2 f_1, \nabla^2 f_2, \nabla^2 f_3, \dots, \nabla^2 f_n)$$

Los cuatro operadores: gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano, pueden relacionarse a través de la siguiente identidad:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$$

### Coordenadas curvilíneas

Un cambio de coordenadas es una transformación de la forma:

$$x = f_1(u, v, w) \quad ; \quad y = f_2(u, v, w) \quad ; \quad z = f_3(u, v, w)$$

la cual en forma vectorial se escribe como:

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v, w) = f_1(u, v, w) \hat{i} + f_2(u, v, w) \hat{j} + f_3(u, v, w) \hat{k}$$

en donde  $u, v, w$  son las nuevas coordenadas del punto  $\bar{r}$  y se les llama coordenadas curvilíneas.

Se considera que las funciones escalares  $f_1, f_2, f_3$  son diferenciables y que la transformación es invertible, es decir, que existen funciones diferenciables  $g_1, g_2, g_3$  para las cuales:

$$\boxed{u = g_1(x, y, z) \quad ; \quad v = g_2(x, y, z) \quad ; \quad w = g_3(x, y, z)}$$

Esto puede garantizarse si se pide que el jacobiano de la transformación de  $(x, y, z)$  a  $(u, v, w)$  no se anule, es decir, que:

$$J \left( \frac{x, y, z}{u, v, w} \right) \neq 0$$

Las ecuaciones de transformación

$$\begin{array}{ll} x = f_1(u, v, w) & u = g_1(x, y, z) \\ y = f_2(u, v, w) & v = g_2(x, y, z) \\ z = f_3(u, v, w) & w = g_3(x, y, z) \end{array}$$

definen un "sistema de coordenadas curvilíneas"

**Teorema.** Para que  $(u, v, w)$  forme un sistema coordenado curvilíneo, la transformación de  $(x, y, z)$  a  $(u, v, w)$  debe ser invertible, es decir, que se debe poder pasar de  $(u, v, w)$  a  $(x, y, z)$  y esta transformación debe ser única; o sea que para

cada terna  $(x, y, z)$  debe existir una y sólo una terna  $(u, v, w)$  y viceversa. Una condición necesaria y suficiente que garantiza estas restricciones es que

$$J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) > 0 \text{ o también que } J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) < 0$$

La condición  $J > 0$  implica que el sistema  $(u, v, w)$  es un sistema derecho como  $(x, y, z)$ , lo que no ocurre para el sistema  $(y, x, z)$ .

**Ejemplo.** Determinar si las ecuaciones de transformación siguientes definen un sistema de coordenadas curvilíneas:

$$x = 2u + 3v \quad ; \quad y = 4u^2 + 12uv + 9v^2 \quad ; \quad z = w$$

**Solución.** El jacobiano es:

$$J\left(\frac{x, y, z}{u, v, w}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 8u+12v & 12u+18v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Como es cero, no es posible definir un sistema de coordenadas curvilíneas con las ecuaciones de transformación dadas.

### **Superficies y curvas coordenadas**

Si se fija una de las variables  $u, v, w$  en las expresiones

$$x = f_1(u, v, w) \quad ; \quad y = f_2(u, v, w) \quad ; \quad z = f_3(u, v, w)$$

se obtiene una superficie denominada "superficie coordenada".

Por ejemplo, si  $U = k_1$  entonces las ecuaciones

$$x = f_1(k_1, v, w) \quad ; \quad y = f_2(k_1, v, w) \quad ; \quad z = f_3(k_1, v, w)$$

definen una superficie coordenada. Si  $k_1$  toma diversos valores reales, las ecuaciones definen entonces una familia de superficies coordenadas. Esta familia de superficies coordenadas queda definida también a partir de la expresión

$$u = g_1(x, y, z) = k_1$$

De la misma forma, otras dos familias de superficies coordenadas son:

$$v = g_2(x, y, z) = k_2 \quad y \quad w = g_3(x, y, z) = k_3$$

Si en lugar de fijar una cualquiera de las variables  $U, V, W$ , se fijan dos de ellas, por ejemplo  $V = C_2$  y  $W = C_3$  se obtiene la curva

$$x = f_1(u, C_2, C_3) \quad ; \quad y = f_2(u, C_2, C_3) \quad ; \quad z = f_3(u, C_2, C_3)$$

denominada "curva coordenada". Y si  $C_2$  y  $C_3$  toman diferentes valores reales, entonces estas ecuaciones definen una familia de curvas coordenadas de la forma

$$U: \begin{cases} g_2(x, y, z) = C_2 \\ g_3(x, y, z) = C_3 \end{cases}$$

De la misma forma, otras dos familias de curvas coordenadas se obtienen al fijar  $U$  y  $V$  o  $U$  y  $W$  separadamente.

## Un punto en $\mathbb{R}^3$

Un punto en  $\mathbb{R}^3$  puede quedar definido a partir de la intersección de las tres superficies coordenadas:

$$g_1(x, y, z) = k_1 \quad ; \quad g_2(x, y, z) = k_2 \quad ; \quad g_3(x, y, z) = k_3$$

o también a partir de la intersección de las tres curvas coordenadas:

$$U: \begin{cases} g_2(x, y, z) = c_2 \\ g_3(x, y, z) = c_3 \end{cases}, \quad V: \begin{cases} g_1(x, y, z) = c_1 \\ g_3(x, y, z) = c_3 \end{cases}, \quad W: \begin{cases} g_1(x, y, z) = c_1 \\ g_2(x, y, z) = c_2 \end{cases}$$

## Conjunto de vectores base

Por otro lado, un punto en  $\mathbb{R}^3$  queda definido por su vector de posición con respecto al origen de un sistema coordenado cartesiano. Y este vector de posición se expresa a partir de tres vectores unitarios, mutuamente ortogonales:  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ .

Por esta razón se dice que el conjunto  $\left\{ \hat{i}, \hat{j}, \hat{k} \right\}$  es una base

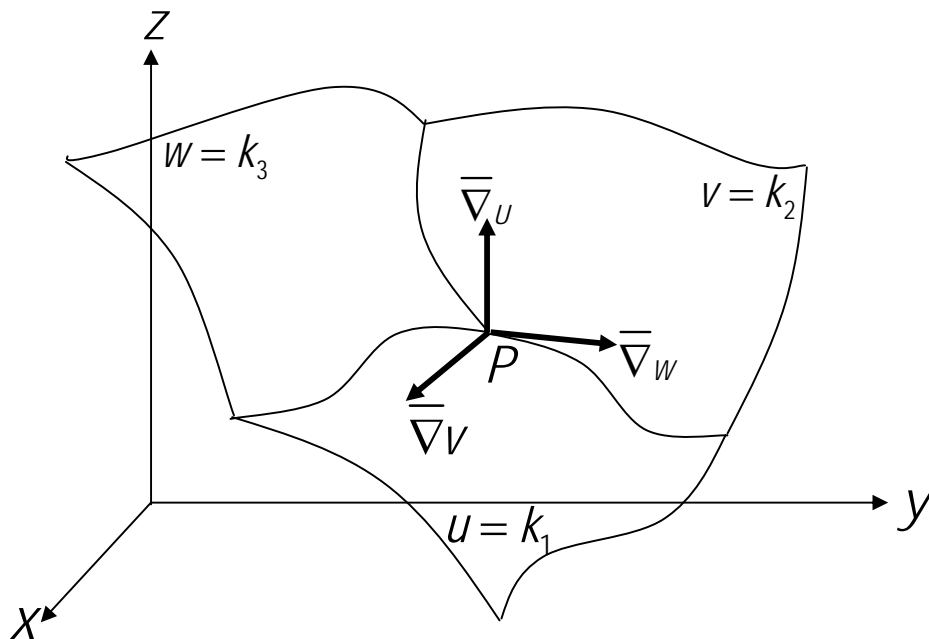
ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ , es decir, un conjunto de vectores linealmente independientes, unitarios, ortogonales entre sí, que generan a cualquier vector en  $\mathbb{R}^3$ .

De manera similar se puede introducir un conjunto de vectores que constituyan una base de  $\mathbb{R}^3$  para sistemas coordenados curvilíneos. En el caso más general, en cada punto  $P$  del

espacio  $\mathbb{R}^3$  existen dos conjuntos de vectores base para los sistemas coordenados curvilíneos:

- El conjunto de vectores normales a las superficies coordenadas.
- El conjunto de vectores tangentes a las curvas coordenadas.

### Vectores normales a las superficies coordenadas



Los tres vectores unitarios  $\bar{e}_u, \bar{e}_v, \bar{e}_w$  normales a las superficies  $u = k_1, v = k_2, w = k_3$  respectivamente, se pueden expresar como:

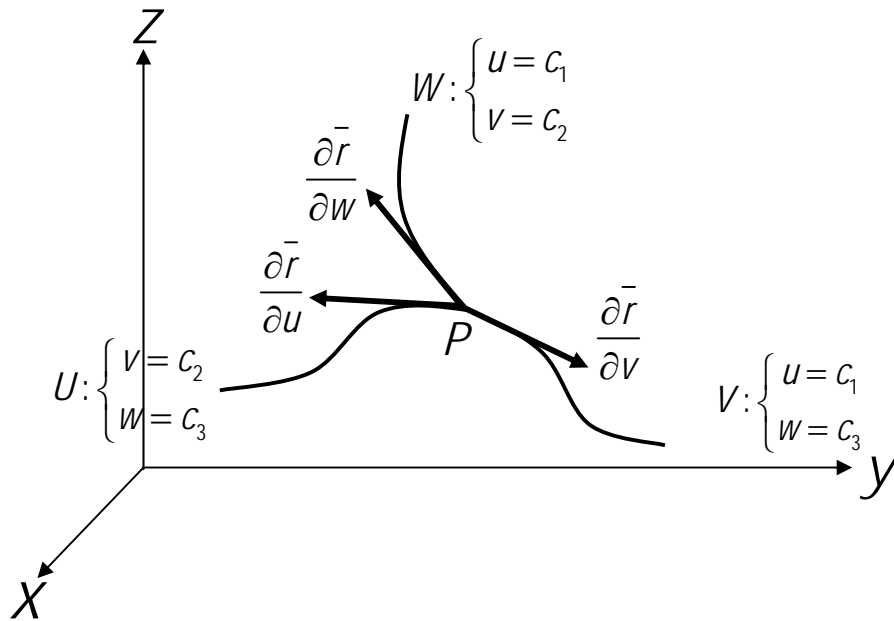
$$\bar{e}_u = \frac{1}{Hu} \bar{\nabla}u \quad ; \quad \bar{e}_v = \frac{1}{Hv} \bar{\nabla}v \quad ; \quad \bar{e}_w = \frac{1}{Hw} \bar{\nabla}w$$

donde

$$Hu = |\bar{\nabla}u| \quad ; \quad Hv = |\bar{\nabla}v| \quad ; \quad Hw = |\bar{\nabla}w|$$

son llamados factores de escala.

## Vectores tangentes a las curvas coordenadas



Si se define  $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ , los tres vectores unitarios  $\bar{e}_u, \bar{e}_v, \bar{e}_w$  tangentes en el punto  $P$  a las curvas coordenadas  $U, V, W$  respectivamente, se pueden expresar como:

$$\bar{e}_u = \frac{1}{h_u} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \quad ; \quad \bar{e}_v = \frac{1}{h_v} \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \quad ; \quad \bar{e}_w = \frac{1}{h_w} \frac{\partial \bar{r}}{\partial w}$$

donde

$$h_u = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right| \quad ; \quad h_v = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right| \quad ; \quad h_w = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial w} \right|$$

son llamados factores de escala.

En general, no es necesario que los vectores base  $\bar{e}_U, \bar{e}_V, \bar{e}_W$  sean mutuamente ortogonales en cualquier punto; sin embargo, si son ortogonales en cada punto, entonces los desarrollos matemáticos se simplifican considerablemente.

**Definición.** Un sistema coordenado curvilíneo se dice ortogonal si las curvas coordenadas  $U, V, W$  son ortogonales en cada punto. En este caso, los tres vectores  $\bar{e}_U, \bar{e}_V, \bar{e}_W$  son mutuamente ortogonales, esto es:

$$\bar{e}_U \cdot \bar{e}_V = \bar{e}_U \cdot \bar{e}_W = \bar{e}_V \cdot \bar{e}_W = 0$$

**Teorema.** Si un sistema de coordenadas curvilíneas es ortogonal, entonces:

$$i) \quad Hu = \frac{1}{hu} \quad ; \quad Hv = \frac{1}{hv} \quad ; \quad Hw = \frac{1}{hw}$$

$$ii) \quad \bar{e}_u = \bar{e}_U \quad ; \quad \bar{e}_v = \bar{e}_V \quad ; \quad \bar{e}_w = \bar{e}_W$$

$$iii) \quad \left| \left[ \bar{\nabla}_U \bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_W \right] \right| = \left| \bar{\nabla}_U \cdot \bar{\nabla}_V \times \bar{\nabla}_W \right| = \frac{1}{hu \, hv \, hw}$$

**Teorema.** En un sistema coordenado curvilíneo ortogonal, si  $S_u, S_v, S_w$  representan longitudes de arco a lo largo de las curvas  $U, V, W$  y " $S$ " representa la longitud de arco de una curva en  $\mathbb{R}^3$ , entonces:

$$i) \quad dS_u = hu \, du; \quad dS_v = hv \, dv; \quad dS_w = hw \, dw$$

$$ii) \quad (dS)^2 = (hu \, du)^2 + (hv \, dv)^2 + (hw \, dw)^2$$



iii) La diferencial de área en un plano formado por las curvas planas  $U$  y  $V$  está dada por:

$$dA = dS_u dS_v = h_u h_v du dv = \left| J \left( \frac{x, y}{u, v} \right) \right| du dv$$

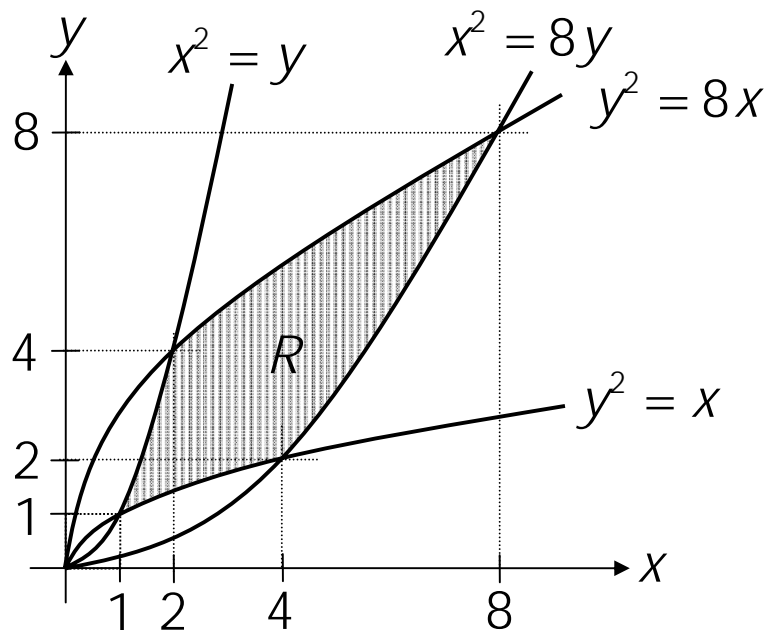
iv) La diferencial de volumen en un sistema  $U, V, W$  está dada por:

$$dV = dS_u dS_v dS_w = h_u h_v h_w du dv dw = \left| J \left( \frac{x, y, z}{u, v, w} \right) \right| du dv dw$$

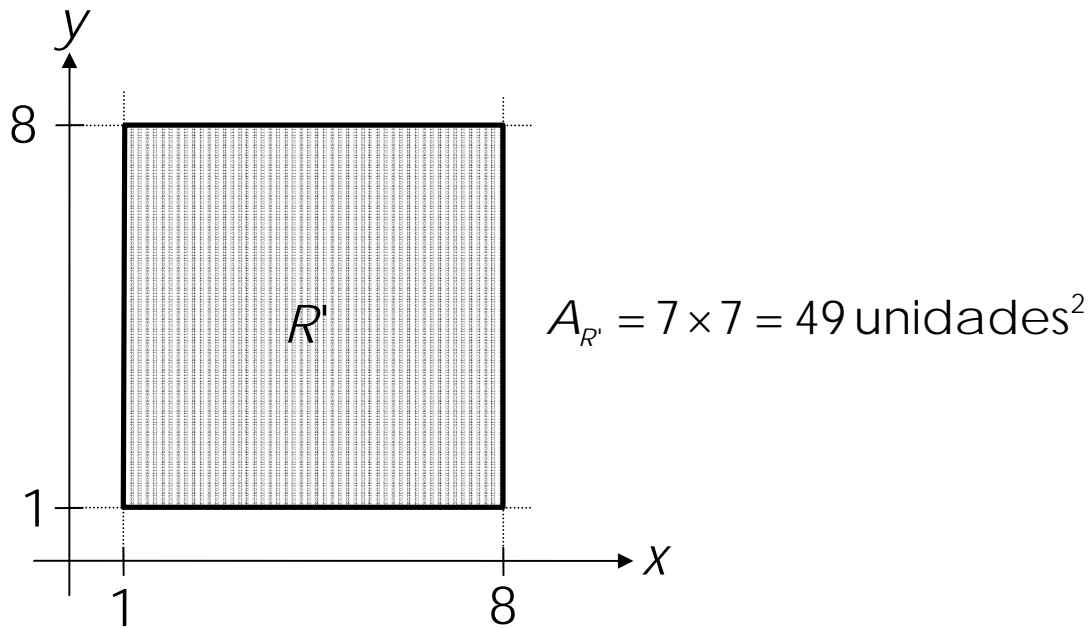
**Ejemplo.** Calcular el área de la región "R" del primer cuadrante del plano "XY" limitada por las curvas:

$$y^2 = 8x \quad ; \quad y^2 = x \quad ; \quad x^2 = 8y \quad ; \quad x^2 = y$$

Solución. La gráfica aproximada de esta región se muestra en la siguiente gráfica:



A partir de las expresiones  $y^2 = ux$  y  $x^2 = vy$  se conforma un sistema curvilíneo (que se puede demostrar que es ortogonal) mediante el cual, tanto la "U" como la "V", varían de 1 a 8 y en el nuevo sistema, el área queda como:



Las ecuaciones del sistema, en términos de las variables  $u$  y  $v$  son:

$$y = \frac{x^2}{v} \Rightarrow \frac{x^4}{v^2} = ux \Rightarrow x^3 = v^2 u$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = v^{\frac{2}{3}} u^{\frac{1}{3}} \\ y = v^{\frac{1}{3}} u^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

El jacobiano de la transformación se obtiene como:

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} v^{\frac{2}{3}} u^{-\frac{2}{3}} & \frac{2}{3} v^{-\frac{1}{3}} u^{\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{3} v^{\frac{1}{3}} u^{-\frac{1}{3}} & \frac{1}{3} v^{-\frac{2}{3}} u^{\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

Dado que este jacobiano es constante y el área del sistema curvilíneo utilizado es un valor constante igual a 49, entonces el área de la región buscada es igual a:

$$A_R = 49 \times \frac{1}{3} \Rightarrow A_R \doteq 16.33 \text{ unidades}^2$$

Ejercicio de Tarea. Mediante coordenadas curvilíneas determinar el valor del área delimitada por las siguientes rectas, graficar las dos regiones en ambos sistemas coordenados y calcular los jacobianos de transformación respectivos:

$$2x + 3y = 6; \quad 2x - y = 6; \quad 2x + 3y = -1.5; \quad x - y = 4$$

Operadores vectoriales, gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano, en coordenadas curvilíneas ortogonales

Teorema. Gradiente en coordenadas curvilíneas

Sean  $\phi = \phi(u, v, w)$  una función escalar diferenciable y  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$ ,  $z = z(u, v, w)$  las ecuaciones de transformación de un sistema coordenado curvilíneo ortogonal. Entonces el gradiente de  $\phi$  en este sistema está dado por:

$$\bar{\nabla}\phi = \frac{1}{h_u} \frac{\partial \phi}{\partial u} \bar{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial \phi}{\partial v} \bar{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial \phi}{\partial w} \bar{e}_w$$

### Teorema. Divergencia en coordenadas curvilíneas

Sea  $\bar{\varphi} = \varphi_1(u, v, w)\bar{e}_u + \varphi_2(u, v, w)\bar{e}_v + \varphi_3(u, v, w)\bar{e}_w$  una función vectorial diferenciable en el sistema curvilíneo ortogonal de vectores base  $\bar{e}_u, \bar{e}_v$  y  $\bar{e}_w$ . Entonces la divergencia de este sistema es:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\varphi} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w \varphi_1) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_w \varphi_2) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v \varphi_3) \right]$$

### Teorema. Rotacional en coordenadas curvilíneas

Sea  $\bar{\varphi} = \varphi_1(u, v, w)\bar{e}_u + \varphi_2(u, v, w)\bar{e}_v + \varphi_3(u, v, w)\bar{e}_w$  una función vectorial diferenciable en el sistema curvilíneo ortogonal de vectores base  $\bar{e}_u, \bar{e}_v$  y  $\bar{e}_w$ . Entonces el rotacional en este sistema es:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \times \bar{\varphi} &= \frac{1}{h_v h_w} \left[ \frac{\partial}{\partial v} (h_w \varphi_3) - \frac{\partial}{\partial w} (h_v \varphi_2) \right] \bar{e}_u \\ &+ \frac{1}{h_u h_w} \left[ \frac{\partial}{\partial w} (h_u \varphi_1) - \frac{\partial}{\partial u} (h_w \varphi_3) \right] \bar{e}_v + \\ &+ \frac{1}{h_u h_v} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (h_v \varphi_2) - \frac{\partial}{\partial v} (h_u \varphi_1) \right] \bar{e}_w \end{aligned}$$

### Teorema. Laplaciano en coordenadas curvilíneas

Sea  $\varphi = \varphi(u, v, w)$  una función escalar diferenciable dos veces y  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$ ,  $z = z(u, v, w)$  las ecuaciones de transformación de un sistema coordenado

curvilíneo ortogonal. Entonces, el laplaciano de  $\varphi$  en este sistema está dado por:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{h_u h_w}{h_v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) \right]$$

Nota. En estas expresiones,

$$h_u = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right| \quad ; \quad h_v = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right| \quad ; \quad h_w = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial w} \right|$$

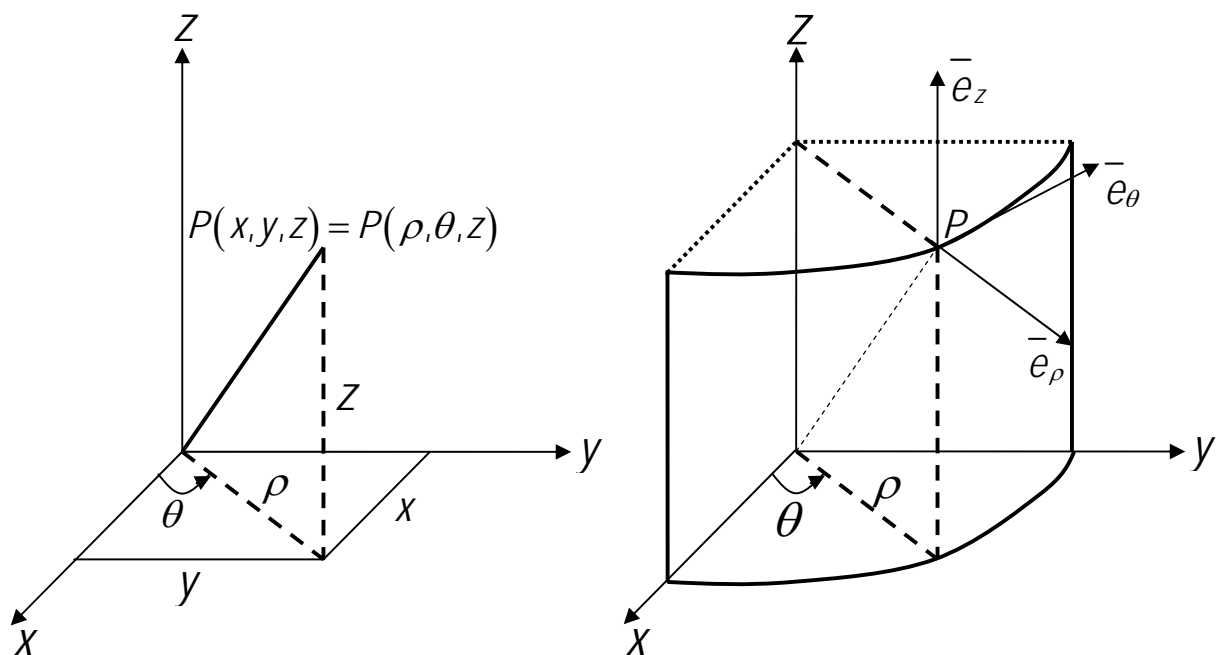
son los "factores de escala".

### Sistema coordenado cilíndrico circular

Se define a través de la transformación:

$$x = \rho \cos \theta \quad ; \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta \quad ; \quad z = z \quad ; \quad \rho \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Estas ecuaciones se deducen a partir de la siguiente figura:



La ecuación de las superficies coordenadas, correspondientes a cilindros circulares, que tienen a "Z" como eje común, es:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{constante}$$

La ecuación de las superficies coordenadas, correspondientes a semiplanos verticales que pasan por el eje "Z", es:

$$\theta = \text{angtan}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{constante}$$

y la ecuación de las superficies coordenadas, correspondientes a planos paralelos al plano "xy", es:

$$z = z = \text{constante}$$

Estas tres ecuaciones son las de transformación del sistema  $\rho\theta Z$  al sistema  $xyz$ .

En la figura se puede ver que se trata de un sistema ortogonal y para verificarlo se hace lo siguiente:

Sea

$$\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad ; \quad \bar{r} = \rho \cos\theta \hat{i} + \rho \text{sen}\theta \hat{j} + z\hat{k}$$

Entonces:

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} = \cos\theta \hat{i} + \text{sen}\theta \hat{j} \quad \Rightarrow \quad h_\rho = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} \right| = 1$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} = -\rho \text{sen}\theta \hat{i} + \rho \cos\theta \hat{j} \quad \Rightarrow \quad h_\theta = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \right| = \rho$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial z} = \hat{k} \quad \Rightarrow \quad h_z = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} \right| = 1$$

Luego:

$$\bar{e}_\rho = \cos\theta \hat{i} + \text{sen}\theta \hat{j} \quad ; \quad \bar{e}_\theta = -\text{sen}\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j} \quad ; \quad \bar{e}_z = \hat{k}$$

$$\bar{e}_\rho \cdot \bar{e}_\theta = 0 \quad ; \quad \bar{e}_\rho \cdot \bar{e}_z = 0 \quad ; \quad \bar{e}_\theta \cdot \bar{e}_z = 0$$

Además,

$$\bar{\nabla}_\rho = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{j} \quad \Rightarrow \quad H_\rho = |\bar{\nabla}_\rho| = 1$$

$$\bar{\nabla}_\theta = -\frac{y}{x^2 + y^2} \hat{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{j} \quad \Rightarrow \quad H_\theta = |\bar{\nabla}_\theta| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\bar{\nabla}_z = \hat{k} \quad \Rightarrow \quad H_z = |\bar{\nabla}_z| = 1$$

Por lo que:

$$\bar{e}_\rho = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{j} = \cos\theta \hat{i} + \text{sen}\theta \hat{j} = \bar{e}_\rho$$

$$\bar{e}_\theta = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{j} = -\text{sen}\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j} = \bar{e}_\theta$$

$$\bar{e}_z = \hat{k} = \bar{e}_z$$

Y además se tiene que:

$$H_\rho = 1 = \frac{1}{h_\rho} \quad ; \quad H_\theta = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{h_\theta} \quad ; \quad H_z = 1 = \frac{1}{h_z}$$

Por lo tanto, se trata de un sistema coordenado curvilíneo ortogonal.

La diferencial de longitud de arco en este sistema está dada por:

$$(ds)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\theta)^2 + (dz)^2$$

(si  $z=0$ , se tiene el sistema ortogonal plano denominado sistema coordenado polar)

La diferencial de área en este sistema está dada por:

$$dA = \rho \, d\rho \, d\theta$$

(sistema coordenado polar)

La diferencial de volumen en este sistema está dada por:

$$dV = \rho \, d\rho \, d\theta \, dz$$

Las operaciones vectoriales en este sistema son:

Gradiente: 
$$\bar{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\bar{e}_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\bar{e}_z$$

Divergencia: 
$$\bar{\nabla} \cdot \bar{F} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho f_1) + \frac{\partial}{\partial\theta}(f_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho f_3) \right]$$

Rotacional: 
$$\bar{\nabla} \times \bar{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \bar{e}_\rho & \rho\bar{e}_\theta & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

Laplaciano:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial\rho} \left( \rho \frac{\partial\phi}{\partial\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \right]$$

donde: 
$$\phi = \phi(\rho, \theta, z) \quad y \quad \bar{F} = f_1\bar{e}_\rho + f_2\bar{e}_\theta + f_3\bar{e}_z$$

**Ejemplo.** Calcular la longitud de arco de la espiral de Arquímedes de ecuación  $\rho = a\theta$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$ .



**Ejemplo.** Calcular el gradiente de la siguiente función en coordenadas cilíndricas:

$$\phi(\rho, \theta, z) = \rho^2 (\operatorname{sen}^2 \theta + 9 \cos^2 \theta) - 4z^2$$

**Ejemplo.** Demostrar que el siguiente campo dado en coordenadas polares es un campo conservativo:

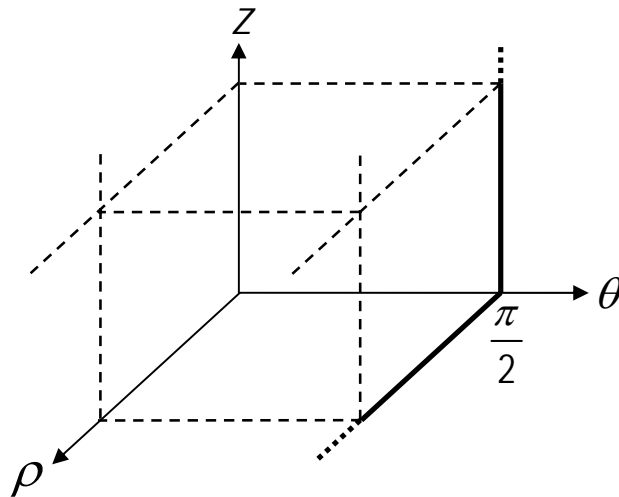
$$\vec{F} = 18\rho\vec{e}_\rho - 8z\vec{e}_z$$

**Ejemplo.** Expresar el siguiente campo vectorial en coordenadas polares:

$$\vec{F}(x, y) = (x^3 + xy^2 + 2y)\hat{i} + (x^2y + y^3 - 2x)\hat{j}$$

Si se pasa el cilindro del primer cuadrante al nuevo sistema, se tiene un lugar geométrico de más fácil manejo que dicho cilindro.

Así, para  $\rho \geq 0$  ;  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  ;  $0 \leq z < \infty$



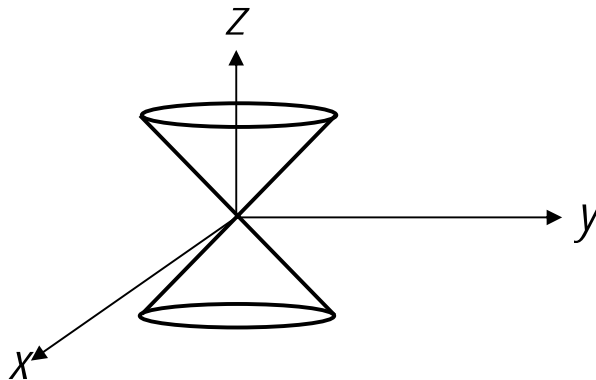
Y si se considera todo el cilindro, se tendría también un prisma limitado en  $\theta$  por  $2\pi$  y sin limitaciones tanto en  $z$  como en  $\rho$

**Ejemplo.** Obtener las ecuaciones de las siguientes superficies en coordenadas cilíndricas, identificarlas y graficarlas:

$$i) \quad x^2 + y^2 = 4z^2 \quad ; \quad ii) \quad y^2 = x$$

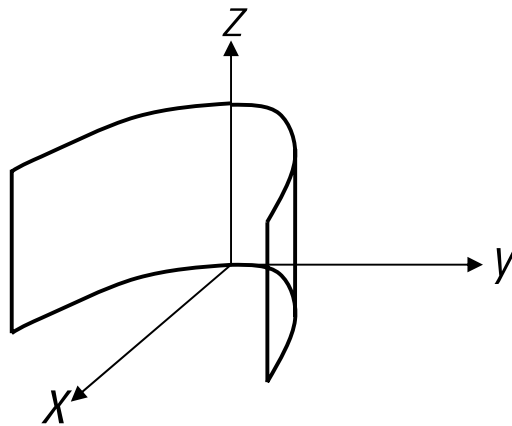
**Solución.**

i)  $x^2 + y^2 = 4z^2$ . Es un cono cuyo eje coincide con el eje "z". Su gráfica aproximada es:



$$x^2 + y^2 = \rho^2 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = 4z^2 \quad \Rightarrow \quad \rho = 2z$$

ii)  $y^2 = x$ . Es un cilindro parabólico cuyas generatrices son paralelas al eje "z".



$$y^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta \quad ; \quad x = \rho \cos \theta$$

$$\Rightarrow \quad \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta = \rho \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \rho = \operatorname{csc} \theta \cot \theta$$

**Ejemplo.** Obtener la ecuación rectangular de la superficie dada por

$$\rho^2 \cos 2\theta - z^2 = 1$$

e identificarla.

**Solución.** Dado que  $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$ , entonces:

$$\rho^2 (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) - z^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta - z^2 = 1$$

Como  $\rho \cos \theta = x$  y  $\rho \operatorname{sen} \theta = y$ , entonces, finalmente, se llega a:

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1$$

Se trata de un hiperboloide de dos hojas, cuyo eje coincide con el eje "x".

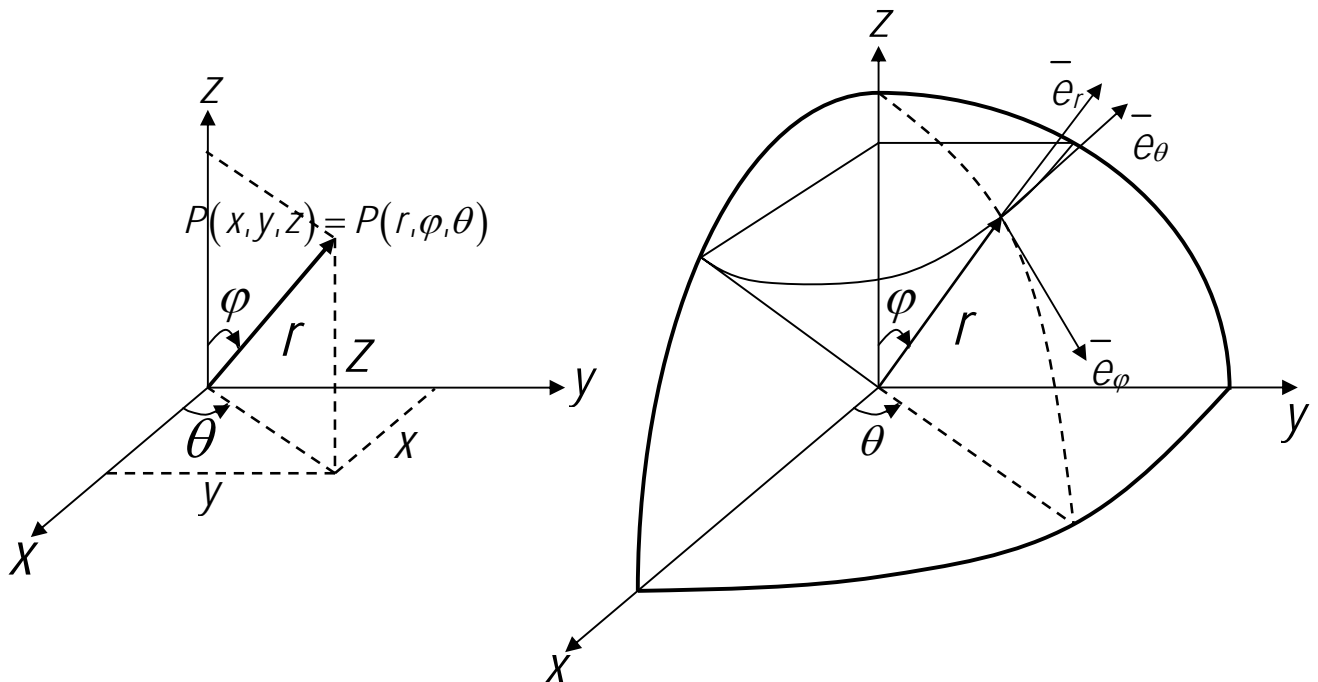
## Sistema coordenado esférico

Este sistema se define a través de la transformación:

$$x = r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \quad ; \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \quad ; \quad z = r \cos \varphi$$

$$r \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad ; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

Estas ecuaciones se deducen a partir de la siguiente figura:



La ecuación de las superficies coordenadas, correspondientes a esferas concéntricas cuyo centro está en el origen, es:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{constante}$$

La ecuación de las superficies coordenadas, correspondiente a conos circulares centrados en el eje "z" y con vértices en el origen, es:

$$\varphi = \arccos \left( \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \text{constante}$$

La ecuación de las superficies coordenadas, correspondientes a semiplanos que pasan por el eje "Z", es:

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \text{constante}$$

Estas son las ecuaciones de transformación de coordenadas esféricas a cartesianas.

El jacobiano de la transformación está dado por:

$$J\left(\frac{x, y, z}{r, \varphi, \theta}\right) = \begin{vmatrix} \cos\theta \operatorname{sen}\varphi & r\cos\theta \cos\varphi & -r\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi & r\operatorname{sen}\theta \cos\varphi & r\cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow J\left(\frac{x, y, z}{r, \varphi, \theta}\right) = r^2 \operatorname{sen}\varphi$$

que es diferente de cero en todas partes, excepto en el eje "Z". El orden en el que se presentan  $r, \varphi, \theta$  se debe a que de esta forma el sistema es derecho; si se tomara el orden  $r, \theta, \varphi$ ,

el jacobiano  $J\left(\frac{x, y, z}{r, \theta, \varphi}\right)$  sería negativo.

También se puede demostrar que este sistema coordenado es ortogonal, lo que se deja de tarea

La diferencial de longitud de arco en este sistema es:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\varphi (d\theta)^2$$

La diferencial de volumen en este sistema es:

$$dV = r^2 \operatorname{sen}\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta$$

Las expresiones para las operaciones vectoriales son:

Gradiente: 
$$\bar{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r} \bar{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \bar{e}_\varphi + \frac{1}{r\operatorname{sen}\varphi} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \bar{e}_\theta$$

Divergencia:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{F} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_1 \operatorname{sen}\varphi) + \frac{\partial}{\partial\varphi} (r f_2 \operatorname{sen}\varphi) + \frac{\partial}{\partial\theta} (r f_3) \right]$$

rotacional: 
$$\bar{\nabla} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{e}_r & r\bar{e}_\varphi & r\operatorname{sen}\varphi\bar{e}_\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial\theta} \\ f_1 & r f_2 & r f_3 \operatorname{sen}\varphi \end{vmatrix} \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\varphi}$$

Laplaciano:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial\varphi} \left( \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) \right]$$

donde:

$$\phi = \phi(r, \varphi, \theta) \quad \text{y} \quad \bar{F} = f_1 \bar{e}_r + f_2 \bar{e}_\varphi + f_3 \bar{e}_\theta$$

**Ejemplo.** Calcular el gradiente de la función:

$$\phi(r, \varphi, \theta) = r^2 \operatorname{sen}\varphi$$

Solución. 
$$\bar{\nabla}\phi = 2r\operatorname{sen}\varphi \bar{e}_r + r\cos\varphi \bar{e}_\varphi$$

**Ejemplo.** Obtener las ecuaciones, en coordenadas esféricas, de las siguientes superficies, e identificarlas:

$$i) \quad x^2 + y^2 = z^2 \quad ; \quad ii) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$$

**Solución.**

i)  $x = r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi$  ;  $y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$  ;  $z = r \cos \varphi$   
de donde:

$$r^2 \cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \varphi + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \varphi = r^2 \cos^2 \varphi$$

$$\Rightarrow r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) = r^2 \cos^2 \varphi$$

$$\Rightarrow r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi = r^2 \cos^2 \varphi$$

Para  $r > 0$ , se tiene que:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = 1 \Rightarrow \tan^2 \varphi = 1 \Rightarrow \tan \varphi = \pm 1$$

La ecuación  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  representa el cono superior y la ecuación

$\varphi = \frac{3\pi}{4}$  al cono inferior (semiconos).

$$ii) \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad y \quad z = r \cos \varphi$$

$$\text{luego: } r^2 - 4r \cos \varphi = 0 \Rightarrow r(r - 4 \cos \varphi) = 0$$

Se excluye  $r = 0$  y la ecuación de la esfera es:  $r = 4 \cos \varphi$

**Ejemplo.** En otro ejemplo se demostró que el campo gravitacional de la tierra es un campo solenoidal. Su expresión

era:  $\vec{V} = -\frac{gR^2}{r^3} \vec{r}$ . Verificar que efectivamente es solenoidal,

pero utilizando coordenadas esféricas.

**Solución.** El vector  $\vec{r}$ , en coordenadas esféricas, está dado por:

$$\vec{r} = r \vec{e}_r$$

$$\text{luego} \quad \vec{V} = -\frac{gR^2}{r^3} (r \vec{e}_r) = -\frac{gR^2}{r^2} \vec{e}_r$$

por lo tanto:

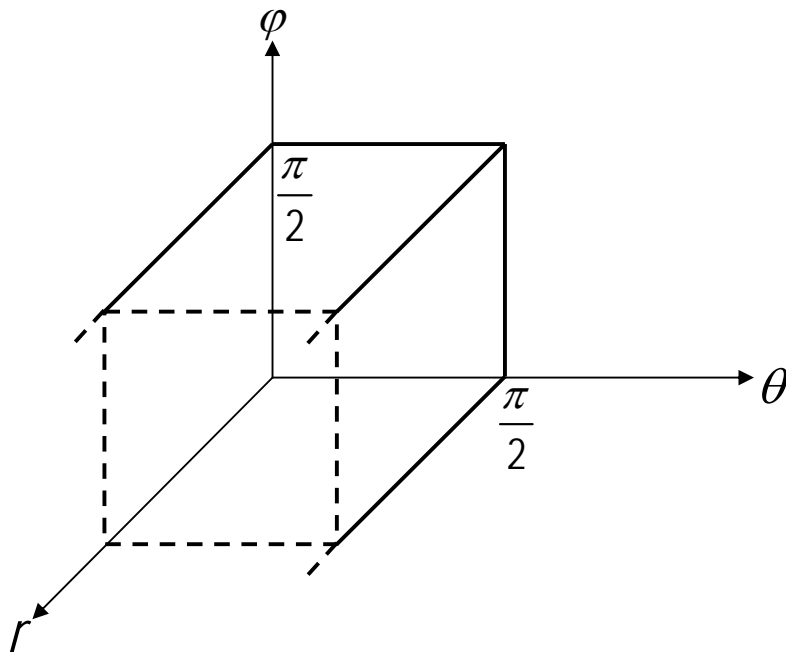


$$\bar{\nabla} \cdot \bar{v} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \operatorname{sen}\varphi) \left( -\frac{gR^2}{r^2} \right) \right] \quad \text{q.e.d.}$$

$$\Rightarrow \bar{\nabla} \cdot \bar{v} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\varphi} \frac{\partial}{\partial r} (-gR^2 \operatorname{sen}\varphi) = 0$$

Si se transforma la esfera del primer octante al nuevo sistema  $r, \varphi, \theta$ , se tendrá un lugar geométrico de más fácil manejo. Así, para

$$r \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



Si se considera toda la esfera, la nueva región vendrá dada también por un prisma con limitaciones de  $\pi$  en  $\varphi$  y de  $2\pi$  en  $\theta$ , y sin limitaciones en  $r$ .