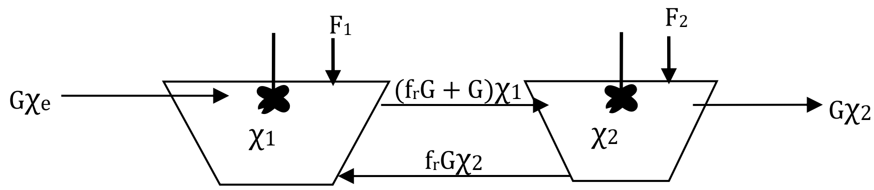

Figura 2.9

Dos reactores en serie bien mezclados con retroalimentación influenciados por fuentes directas

Reactores en estado transitorio

Hasta ahora se han estudiado reactores cuyas características no presentan una evolución, es decir, operan en estado estacionario donde no hay acumulación de masa; sin embargo, es importante el estudio de un conjunto de reactores que muestran un estado transitorio cuando se desea conocer sus respuestas derivadas de alteraciones a las cantidades que ingresan a ellos, es decir, a sus funciones de entrada. Por ejemplo, se puede tener una serie de lagunas interconectadas en donde una de ellas se ve afectada por el derrame de un material tóxico. En este caso el problema consiste en conocer la respuesta del sistema lagunar al material derramado en una de las lagunas, tomando en cuenta la evolución que sufre el sistema después de ocurrido el accidente.

En el estado transitorio la aplicación del principio de conservación de la masa tomando en cuenta dos reactores bien mezclados iguales a los de la figura 2.9 sin recirculación, proporciona las siguientes dos ecuaciones diferenciales que describen la evolución de cada uno de ellos:

Reactor 1 $\cancel{V}_1 \frac{d\chi_1}{dt} = G\chi_e - G\chi_1 + F_1 - \cancel{V}_1 k_d \chi_1$

Reactor 2 $\cancel{V}_2 \frac{d\chi_2}{dt} = G\chi_1 - G\chi_2 + F_2 - \cancel{V}_1 k_d \chi_2$

Se tiene ahora un conjunto de 2 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que tiene solución exacta como se analiza en los ejemplos 2.9 y 2.10. Sin embargo, debe mencionarse que, en sistemas más complejos, tanto por su número como por su comportamiento, cuando no se conocen las soluciones exactas de las ecuaciones diferenciales correspondientes, se pueden resolver conjuntos de n ecuaciones diferenciales similares utilizando métodos numéricos apropiados, como, por ejemplo, los métodos de Runge-Kutta que son muy utilizados para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales.

También conviene tener presente que la solución del conjunto de ecuaciones diferenciales mostradas parte de establecer una condición inicial para cada una de ellas.

Los siguientes dos ejercicios ilustran muy bien estos conceptos.

Ejemplo 2.9 Tres lagunas bien mezcladas en estado transitorio impactadas por una sustancia conservativa

Una laguna bien mezclada contiene una concentración inicial χ_{10} = 350 ppm de una sustancia conservativa. La laguna se encuentra interconectada con otras dos lagunas conteniendo agua limpia y comienza a introducírsele agua limpia a la primera lagua usando un caudal G = 0.1 m^3/s, como se ilustra en la figura E2.8.1. Determine la evolución de las tres lagunas graficando sus concentraciones en función del tiempo.

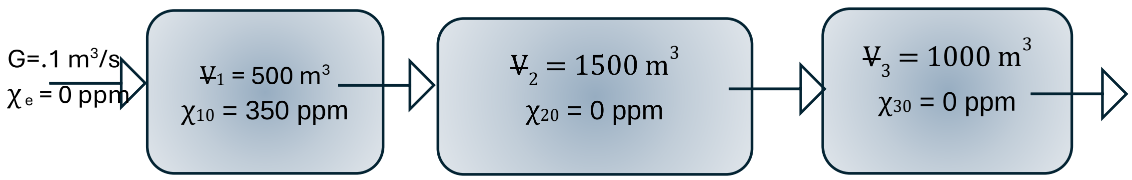

Figura E2.9.1 Tres lagunas bien mezcladas operando con acumulación de masa.

Solución

Si χ_1, χ_2, y χ_3 son las concentraciones en la primera, segunda y tercera laguna, respectivamente, un balance de masa en estado no estacionario (proceso transitorio) en cada laguna empleando la ecuación 2.8 sin fuentes directas ni transformaciones, proporciona las siguientes tres ecuaciones diferenciales

Laguna 1: $$V_1 \frac{d\chi_1}{dt} = G\chi_1$$

Laguna 2: $$V_2 \frac{\chi_2}{dt} = G\chi_1 - G\chi_2$$

Laguna 3: $$V_3 \frac{d\chi_3}{dt} = G\chi_2 - G\chi_3$$

Con las siguientes condiciones iniciales

$$\chi_1(t = 0) = \chi_{10}$$
$$\chi_2(t = 0) = 0$$
$$\chi_3(t = 0) = 0$$

En donde V_1, V_2 y V_3 son los volúmenes de la primera, segunda y tercera laguna, respectivamente.

No es difícil resolver este sistema de 3 ecuaciones diferenciales ya que se puede hacer en forma secuencial: Primero se resuelve la primera y el resultado se sustituye en la segunda ecuación. Posteriormente se resuelve la segunda y el resultado se sustituye en la tercera ecuación, para finalmente proceder a resolver esta última. A continuación, se muestra el procedimiento.

Separando variables e integrando se obtiene la solución de la primera ecuación diferencial (véase el ejercicio 2.3)

$$\chi_1(t,\theta_1) = \chi_{10} e^{-\frac{t}{\theta_1}} \qquad \text{(E2.9.1)}$$

En donde el tiempo de retención $\theta_1 = \frac{V_1}{G}$

Sustituyendo la ecuación E2.9.1 en la segunda ecuación diferencial se tiene

$$\frac{d\chi_2}{dt} + \frac{\chi_2}{\theta_2} = \frac{\chi_{10}}{\theta_2} e^{-\frac{t}{\theta_1}}$$

En donde el tiempo de retención $\theta_2 = \frac{V_2}{G}$

Usando el factor integrante $e^{\frac{t}{\theta_1}}$ en esta ecuación diferencial se obtiene la siguiente solución

$$\chi_2(t,\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}\right)} \left[\chi_1(t,\theta_1) - \chi_1(t,\theta_2)\right] \qquad \text{(E2.9.2)}$$

En donde

$$\chi_1(t,\theta_1) = \chi_{10} e^{-\frac{t}{\theta_1}}$$

$$\chi_1(t,\theta_2) = \chi_{10} e^{-\frac{t}{\theta_2}}$$

Sustituyendo la ecuación E2.9.2 en la tercera ecuación diferencial se tiene

$$\frac{d\chi_3}{dt} + \frac{\chi_3}{\theta_3} = \frac{\chi_{10}}{\left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}\right)} \left(e^{-\frac{t}{\theta_1}} - e^{-\frac{t}{\theta_2}}\right)$$

En donde $\theta_3 = \frac{V_3}{G}$. La solución de esta última ecuación diferencial es, usando el mismo método del factor integrante

$$\chi_3(t,\theta_1,\theta_2,\theta_3) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\theta_3}{\theta_2}\right)} \left[\chi_2(t,\theta_{1,}\theta_2) - \chi_2(t,\theta_1,\theta_3)\right] \qquad \text{(E2.9.3)}$$

Donde

$$\chi_2(t,\theta_{1,}\theta_2) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}\right)}[\chi_1(t,\theta_1) - \chi_1(t,\theta_2)]$$

$$\chi_2(t,\theta_{1,}\theta_3) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\theta_3}{\theta_1}\right)}[\chi_1(t,\theta_1) - \chi_1(t,\theta_3)]$$

Finalmente, utilizando los siguientes datos y las ecuaciones E2.9.1, E2.9.2 y E2.9.3 se trazaron las curvas que aparecen en la figura E2.8.2.

$\theta_1 = \frac{500}{0.1} = 5000\text{ s} = 1.4\text{ h}$, $\theta_2 = \frac{1500}{0.1} = 15000\text{ s} = 4.2\text{ h}$ y $\theta_3 = \frac{1000}{0.1} = 10000\text{ s} = 2.8\text{ h}$

Obsérvese en esta figura el comportamiento que tienen las concentraciones de la primera laguna; estas decrecen exponencialmente debido al ingreso de agua limpia que tiende a limpiarla. Sin embargo, el material que es expulsado de la primera laguna comienza a ingresar a la segunda laguna contaminándola paulatinamente hasta que la concentración de la primera laguna disminuye lo suficiente para lograr que se invierta la tendencia a incrementarse la concentración de la segunda laguna y, después de alcanzar un valor máximo, comienza a disminuir gradualmente. Este comportamiento se replica en la tercera laguna con concentraciones inferiores a la segunda laguna ya que la sustancia se ha diluido en el proceso.

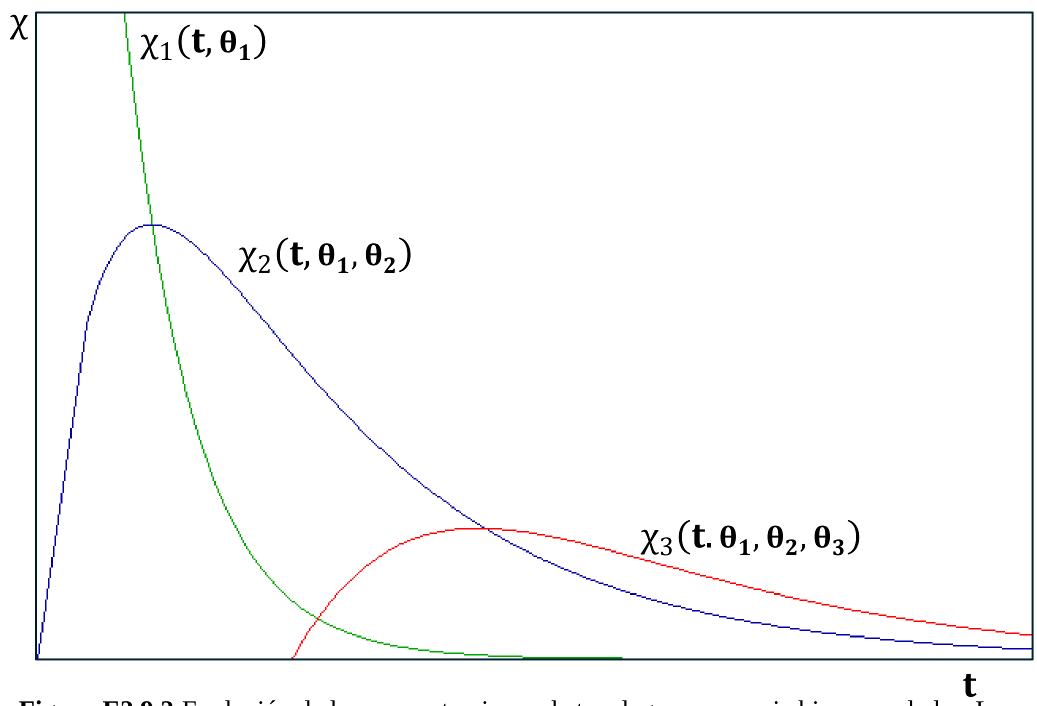

Figura E2.9.2 Evolución de las concentraciones de tres lagunas en serie bien mezcladas. La primera laguna expulsa agua contaminada afectando a la segunda y tercera laguna.

Ejemplo 2.10

Se tienen dos reactores bien mezclados operando en serie por donde transita un gasto $G = 0.2$ m^3/s. El primer reactor inicia su operación con una concentración C_{10} = 1000 ppm de una sustancia reactiva que se degrada siguiendo una reacción de orden 1 ingresándole agua limpia, mientras que el segundo reactor, que contiene agua limpia, se ve afectado por el ingreso de material del primer reactor. Determine la concentración máxima que se genera en el segundo reactor y el tiempo que tarda en alcanzarla.

Datos
$\theta_1 = 3.4$ h h
$\theta_2 = 5.2$ h
k_d = 0.02 1/h

Solución

Un balance de masa en estado no estacionario en cada reactor tomando en cuenta la degradación de primer orden de la sustancia transportada, proporciona las siguientes dos ecuaciones diferenciales

Reactor 1: $$V_1 \frac{d\chi_1}{dt} = G\chi_1 - k_d V_1 \chi_1$$

Reactor 2: $$V_2 \frac{d\chi_2}{dt} = G\chi_1 - G\chi_2 - k_d V_2 \chi_2$$

Con las siguientes condiciones iniciales

$$\chi_1(t = 0) = \chi_{10}$$
$$\chi_2(t = 0) = 0$$

Estas dos ecuaciones diferenciales se pueden resolver usando el mismo método que el utilizado en el ejercicio 2.9. La solución de la primera ecuación diferencial es

$$\chi_1(t, \theta_1) = \chi_{10} e^{-\left(k_d + \frac{1}{\theta_1}\right)t}$$

En donde el tiempo de retención $\theta_1 = \frac{V_1}{G}$

Sustituyendo este resultado en la segunda ecuación diferencial se tiene

$$\frac{d\chi_2}{dt} = \frac{\chi_{10} e^{-\left(k_d + \frac{1}{\theta_1}\right)t}}{\theta_2} - \left(\frac{1}{\theta_2} + k_d\right)\chi_2 \qquad \text{(E2.10.1)}$$

En donde el tiempo de retención $\theta_2 = \frac{V_2}{G}$

La solución de la ecuación E2.10.1 es

$$\chi_2(t,\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}\right)}\left[\chi_1(t,\theta_1) - \chi_1(t,\theta_2)\right] \qquad \text{(E2.10.2)}$$

En donde

$$\chi_1(t,\theta_1) = \chi_{10} e^{-(k_d + \frac{1}{\theta_1})t}$$
$$\chi_1(t,\theta_2) = \chi_{10} e^{-(k_d + \frac{1}{\theta_2})t}$$

Para obtener la concentración máxima nótese que si se procede a anular la derivada de la ecuación E2.10.1 la concentración χ_2 adquiere su valor máximo χ_{max}, y el tiempo t se corresponde con el tiempo crítico t_c, es decir, se obtiene

$$\chi_{max} = \frac{\chi_{10} e^{-(k_d + \frac{1}{\theta_1})t_c}}{1 + k_d\theta_2} \qquad \text{(E2.10.3)}$$

Se tiene ahora el problema de determina el tiempo crítico t_c.. Para obtener el tiempo crítico se deriva con respecto del tiempo la ecuación E2.10.2 y se iguala el resultado a cero, obteniéndose, después de despejar el tiempo crítico

$$t_c = \frac{Ln\left[\frac{k_d + \frac{1}{\theta_1}}{k_d + \frac{1}{\theta_2}}\right]}{(k_d + \frac{1}{\theta_1}) - (k_d + \frac{1}{\theta_2})} \qquad \text{(E2.10.4)}$$

Sustituyendo los datos del problema en las ecuaciones E2.10.4 y E2.10.3 se obtienen los siguientes resultados que se presentan en la figura E2.10.1.

$$t_c = \frac{Ln\left[\frac{0.02 + \frac{1}{3.4}}{0.02 + \frac{1}{5.2}}\right]}{\left(0.02 + \frac{1}{3.4}\right) - \left(0.02 + \frac{1}{5.2}\right)} = 3.85 \text{ min}$$

$$\chi_{max} = \frac{1000 \text{ x } e^{-\left(0.02 + \frac{1}{3.4}\right) \text{ x } 3.85}}{1 + 0.02 \text{ x } 5.2} = 270 \text{ ppm}$$

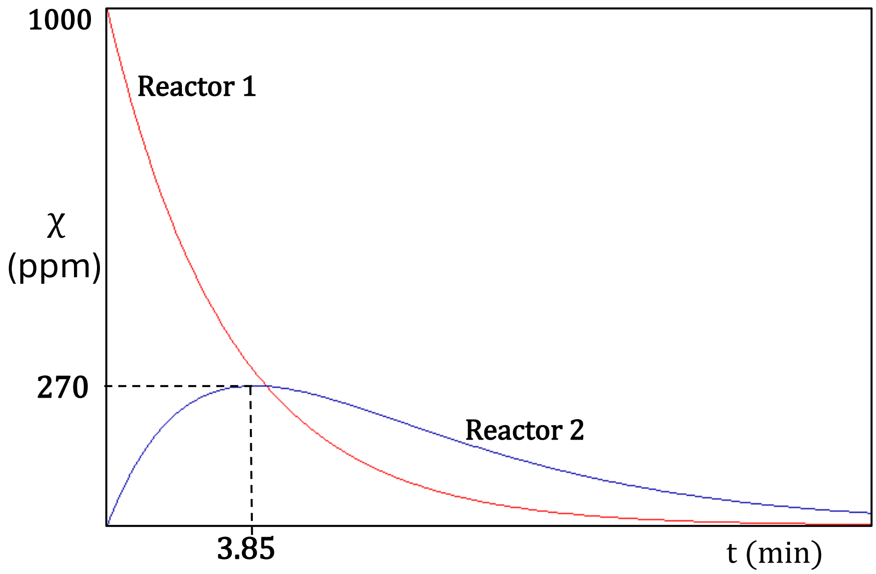

Figura E2.10.1 Concentración máxima y tiempo crítico generado en el reactor 2 debido al ingreso de material reactivo proveniente del reactor 1.