Métodos de aproximaciones sucesivas

Métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel

Resuelven sistemas de ecuaciones lineales compatibles determinados

$$
\begin{array}{cccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\dots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\dots & +a_{2n}x_n = & b_2 \\
a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & +\dots & +a_{3n}x_n = & b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & +\dots & +a_{nn}x_n = & b_n
\end{array}
$$

Forma matricial

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

A= matriz de coeficientes aij
x= vector de incógnitas
b= vector de términos independientes

Como lo resuelve

Busca obtener una ecuación matricial y propone un vector solución inicial

se hacen las interaciones necesarias hasta alcanzar el % de error propuesto previamente

este error es medido mediante la norma entre dos vectores

también podemos ver la Forma matricial como

$$D + R\bar{x} = \bar{b}$$

DONDE

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

JÁCOBI

DESPUÉS DE UNA PESADA ÁLGEBRA...

$$\bar{X}^{(k+1)} = D^{-1} \cdot (\bar{b} - R\bar{X}^{(k)})$$

de otro modo se puede ver como

y aplicando una forma recursiva

$$
\begin{aligned}
X_1^{(k+1)} &= \frac{b_1-(a_{12}X^{(k_2)}+a_{13}X^{(k_3)}+\dots+a_{1n}X^{(k_n)}}{a_{11}} \\
X_2^{(k+1)} &= \frac{b_2-(a_{21}X^{(k_2)}+a_{23}X^{(k_3)}+\dots+a_{2n}X^{(k_n)}}{a_{22}} \\
X_3^{(k+1)} &= \frac{b_3-(a_{31}X^{(k_2)}+a_{32}X^{(k_3)}+\dots+a_{3n}X^{(k_n)}}{a_{33}} \\
&\vdots \\
X_n^{(k+1)} &= \frac{b_n-(a_{n1}X^{(k_2)}+a_{n2}X^{(k_3)}+\dots+a_{nn-1}X_{n-1}^{(k)}}{a_{nn}}
\end{aligned}
$$

mientras el % de error sera

$$\theta = \sqrt{(X_1^{(k+1)} - X_1^{(k)})^2 + \dots + (X_n^{(k+1)} - X_n^{(k)})}$$

Gauss-Seidel

versión acelerada de Jácobi

$$
\begin{aligned}
X_1^{(k+1)} &= \frac{b_1-(a_{12}X^{(k_2)}+a_{13}X_3^{(k)}+\dots+a_{1n}X^{(k_n)})}{a_{11}} \\
X_2^{(k+1)} &= \frac{b_2-(a_{21}X_2^{(k+1)}+a_{23}X_3^{(k)}+\dots+a_{2n}X^{(k_n)})}{a_{22}} \\
X_3^{(k+1)} &= \frac{b_3-(a_{31}X_2^{(k+1)}+a_{32}X_3^{(k+1)}+\dots+a_{3n}X^{(k_n)})}{a_{33}} \\
&\vdots \\
X_n^{(k+1)} &= \frac{b_n-(a_{n1}X_2^{(k+1)}+a_{n2}X_3^{(k+1)}+\dots+a_{nn-1}X_{n-1}^{(k+1)})}{a_{nn}}
\end{aligned}
$$

propone ir sustituyendo los nuevos valores conforme se obtengan

Criterios de convergencia

Condición necesaria

Que el elemento ubicado en la diagonal principal de cada ecuación sea mayor en valor absoluto que el resto de los elementos de la misma ecuación

$$|a_{ii}| > |a_{ij}|$$

Condición suficiente

Que el elemento ubicado en la diagonal principal de cada ecuacion sea mayor en valor absoluto que la suma del resto de los elementos de la misma ecuacio

$$|a_{ii}| > \sum |a_{ij}|$$

Burden, R., y Faires, D. Garc´ıa B., S. Gerald, C., y Wheatley, P. Sandoval, H. . (2019). M´etodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel. México CDMX: Auspiciado por el proyecto PAPIME PE105717

Espinosa Rodríguez Juan Pablo
jpespinosa977@gmail.com

02/04/2019

Análisis numérico: Método de Jácobi y Gauss-Seidel.