Métodos abiertos para la solución numérica de ecuaciones algebraicas y trascendentes

Cortés Rosas Jesús Javier, González Cárdenas Miguel Eduardo
Pinilla Morán Víctor Damián, Salazar Moreno Alfonso
Tovar Pérez Víctor Hugo *

2019

Resumen

Esta publicación pertenece al proyecto *Plataforma educativa para Análisis Numérico*, realizado con al apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE105717.

Los métodos numéricos se encargan de obtener respuestas a problemas en donde la solución analítica es complicada. En este caso, se obtendrán raíces de ecuaciones algebraicas o trascendentes desde de una aproximación a su raíz, obtenida a partir de la inspección de su gráfica o de su expresión analítica; a diferencia de los métodos cerrados que requieren de un intervalo que atrape a dicha raíz. Los métodos a desarrollar son Aproximaciones sucesivas y Newton-Raphson[1].

1. Método de Aproximaciones sucesivas

El método de Aproximaciones sucesivas representa la esencia de los procesos iterativos ya que permite definir una ecuación de recurrencia que, en aparencia, no tiene sentido desde el punto de vista algebraico, pero que resulta muy atinada iterativamente hablando ya que toma un valor inicial que se mejora a través de las iteraciones.

Sin embargo, el método como tal no es ciento por ciento aplicable para cualquier ecuación algebraica o trascendente, debe vigilarse estrictamentu su criterio de convergencia; no obstante, se utiliza como base para completar otros métodos abiertos.

1.1. Definición del método

Aproximaciones sucesivas es un método abierto, es decir, no necesita de un intervalo que atrape una raíz, sino que requiere de un valor x_0 que representa una aproximación a la raíz; de la cercanía de ésta a la raíz dependerá la velocidad en que se cumpla con una tolerancia preestablecida.

Una forma sencilla de definir un método de aproximaciones sucesivas consiste en despejar de una ecuación a la variable independiente; esto se aplica particularmente en ecuaciones que por su forma

*Profesores de la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

no permiten despejar fácilmente a la incógnita. Por ejemplo, en la ecuación $x^2 + 7x - e^x = 0$ no puede lograrse un *despeje sencillo*, algebráicamente hablando.

Desde un punto de vista iterativo, la ecuación puede expresarse como:

$$x^2 + 7x - e^x = 0 \Longrightarrow x = \frac{e^x - x^2}{7}$$

En efecto, algebraicamente hablando, el despeje anterior no aporta mejora en la solución de la ecuación. Sin embargo, sí se define en forma iterativa:

$$x_{i+1} = \frac{e^{x_i} - x_i^2}{7}$$

donde x_i es un valor inicial y x_{i+1} es un valor corregido que, en un escenario favorable, tendrá una cantidad de error menor con respecto a la raíz de la ecuación. El proceso iterativo se detendrá cuando entre dos aproximaciones sucesivas (de aquí el nombre del método) se satisfaga la tolerancia preestablecida.

No obstante la aparente facilidad que se muestra, el método no es ciento por ciento eficaz en todas las ecuaciones, como se verá posteriormente.

Una mamera de obtener una ecuación de recurrencia general es la siguiente:

Sea $f(x)$ una función algebraica o trascendente:

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

Sin alterar la ecuación, se suma en ambos miembros la variable independiente:

$$f(x) + x = x \tag{2}$$

Definiendo al término:

$$G(x) = f(x) + x \tag{3}$$

Sustituyendo (3) en (2) se tiene:

$$G(x) = x \tag{4}$$

La ecuación (4) representa el método de Aproximaciones sucesivas, por lo cual debe expresarse en forma iterativa:

$$x_{i+1} = G(x_i) \tag{5}$$

La aplicación del método consiste en proporcionar una aproximación inicial a la raíz de la ecuación (que puede obtenerse por medios gráficos o al detectar un cambio de signo en la función tabular) y sustituirla en la ecuación (5), obteniéndose una nueva aproximación. De nuevo deberá sustituirse esta última hasta que la diferencia entre dos aproximaciones sucesivas satisfaga determinada tolerancia preestablecida. Es importante aclarar que aún cuando se utilice la ecuación de recurrencia (5) las raíces corresponden a la función original $f(x)$.

1.2. Criterio de convergencia y su interpretación geométrica

La principal aportación del método de aproximaciones sucesivas es la obtención de un criterio de convergencia que puede aplicar a varios métodos abiertos.

Geométricamente, la ecuación (5) representa a la curva $y = G(x)$ y a la recta con pendiente unitaria $y = x$. El punto donde la curva y la recta son iguales, es decir, en su intersección corresponde a la raíz en su proyección en el eje horizontal, de acuerdo a la figura 1.

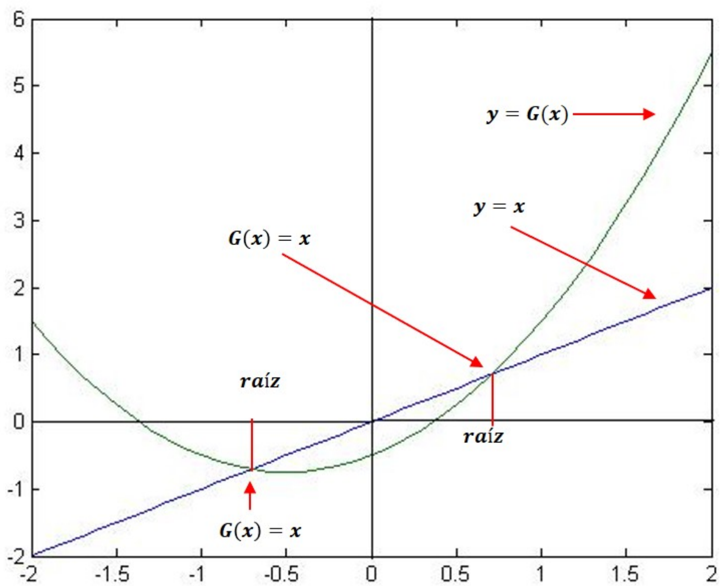

Figura 1: Interpretación geométrica del método de Aproximaciones sucesivas

Sea $f(x)$ una ecuación algebraica o trascendente que tiene como raíz real al número a, sustituyendo en la ecuación (4):

$$a = G(a) \tag{6}$$

Restando (5) a la ecuación (6):

$$a - x_i = G(a) - G(x_{i-1}) \tag{7}$$

Multiplicando el segundo miembro de (7) por el factor unitario:

$$\frac{a - x_{i-1}}{a - x_{i-1}}$$

$$a - x_i = \frac{G(a) - G(x_{i-1})}{a - x_i} \cdot (a - x_i) \tag{8}$$

Aplicando el teorema del valor medio del cálculo diferencial:

$$G'(\tau) = \frac{G(a) - G(x_{i-1})}{a - x_{i-1}}; \qquad x_{i-1} \leq \tau \leq a \tag{9}$$

Sustituyendo la ecuación (9) en (8):

$$a - x_i = G'(\tau)(a - x_i); \qquad x_{i-1} \leq \tau \leq a \tag{10}$$

Despejando $G'(\tau)$:

$$G'(\tau) = \frac{a - x_i}{a - x_{i-1}}; \qquad x_{i-1} \leq \tau \leq a \tag{11}$$

En el segundo miembro de la ecuación (11) puede observarse que su denominador debe ser mayor que el numerador, toda vez que x_{i-1} posee un mayor error que x_i ya que es una aproximación previa. Esto implica que:

$$\mid G'(\tau) \mid = \frac{\mid a - x_i \mid}{\mid a - x_{i-1} \mid} < 1 \tag{12}$$

En consecuencia, el método convergerá si se cumple que:

$$\mid G'(\tau) \mid < 1; \qquad x_{i-1} \leq \tau \leq a \tag{13}$$

Donde τ representa la primera aproximación a la raíz de la ecuación.

En la ecuación (11), cuando el denominador no es mayor que el numerador, es decir, el valor x_i posee un mayor error que x_{i-1}, ocurre que el método no es convergente. En conclusión, no converge en la aproximación τ si:

$$\mid G'(\tau) \mid < 1; \qquad x_{i-1} \leq \tau \leq a \tag{14}$$

Este criterio de convergencia debe probarse para cada una de las aproximaciones a cada raíz.

Los casos de convergencia y divergencia se explican en las siguientes figuras; en todas ellas, el éxito o fracaso del método depende del valor de $G'(\tau)$.

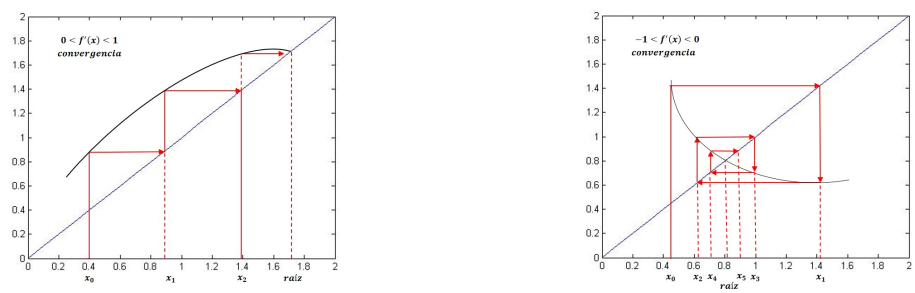

Figura 2: Casos de convergencia monotónica y oscilatoria

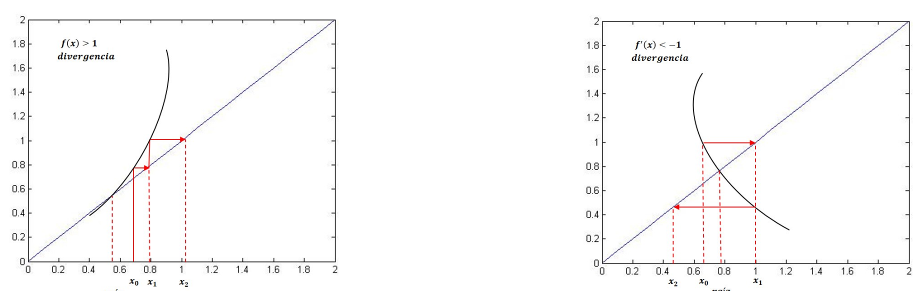

Figura 3: Casos de divergencia: monotónica y oscilatoria

1.3. Ejemplo de aplicación

Consideremos como ejemplo una función sencilla que nos permita verificar resultados fácilmente (Olivera Salazar, s.f.) (García B., 2017). Se propone $f(x) = x^2 - 0{,}5$. Se percibe que este polinomio de segundo grado representa a una parábola que abre hacia arriba; naturalmente, posee dos raíces cuyos valores son $\pm\sqrt{0{,}5}$.

Ahora bien, suponiendo desconocida esta información, se realizará la exploración de la función para encontrar sus raíces. El paso más recomendado es graficar la función.

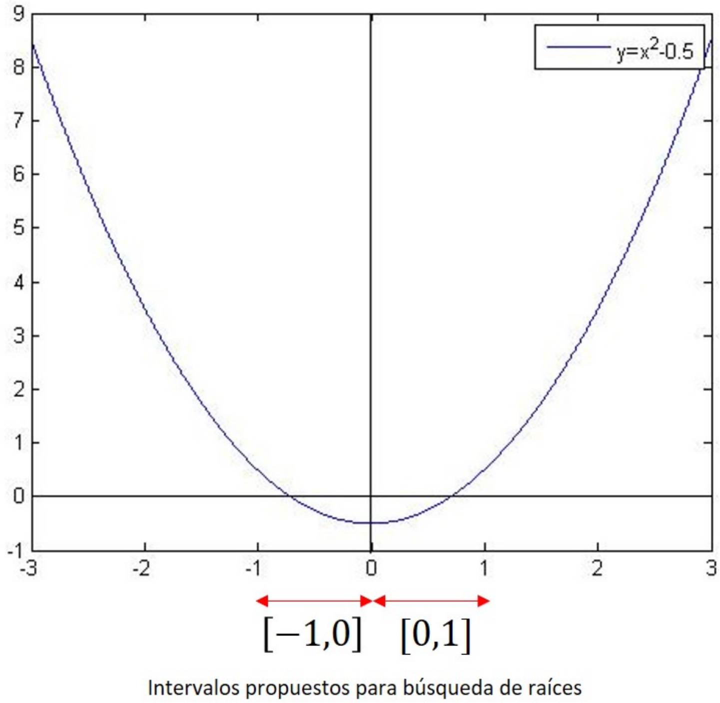

Figura 4: Intervalos iniciales de solución

Se propone como valores iniciales $x_0 = -1$ para la raíz negativa y $x_0 = 1$ para la raíz positiva.

Sea $f(x) = x^2 - 0{,}5$ y en consecuencia $G(x_i = x^2 + x - 0{,}5$ y la ecuación de recurrencia:
$x_{i+1} = x_i^2 + x - i - 0{,}5$

Las iteraciones para la obtención de la aproximación a la raíz negativa se detallan en el cuadro 1. La aproximación a la raíz es $-0{,}70701$ con un error absoluto de 0,00033 después de 8 iteraciones.

Las iteraciones para la obtención de la aproximación a la raíz positiva se detallan en el cuadro 2. Es evidente que para la raíz positiva el método no converge

La explicación se obtiene a partir del criterio de convergencia:

Para la raíz negativa

$$| G'(-1) | = 0{,}5 < 1 \tag{15}$$

Cuadro 1: Obtención de la raíz negativa

Iteraciones	x_{i+1}	$G(x_i)$	Error
0	$-1{,}00000$	$-0{,}50000$	0,50000
1	$-0{,}50000$	$-0{,}75000$	0,25000
2	$-0{,}75000$	$-0{,}68750$	0,06250
3	$-0{,}68750$	$-0{,}71484$	0,02734
4	$-0{,}71484$	$-0{,}70384$	0,01100
5	$-0{,}70384$	$-0{,}70845$	0,00461
6	$-0{,}70845$	$-0{,}70655$	0,00190
7	$-0{,}70655$	$-0{,}70734$	0,00079
8	$-0{,}70734$	$-0{,}70701$	0,00033

Cuadro 2: Obtención de la raíz negativa

Iteraciones	x_{i+1}	$G(x_i)$	Error
0	1,00000	1,50000	0,50000
1	1,50000	3,25000	1,75000
2	3,25000	13,31250	10,06250
3	13,31250	190,03516	176,72266
4	190,03516	36302,89577	36112,86061

Se cumple con el criterio de convergencia. Para la raíz positiva:

$$\mid G'(-1) \mid = 2{,}5 \tag{16}$$

Para esta aproximación no se cumple con el criterio de convergencia.

1.4. Conclusiones

Como ya se ha mencionado, la principal aportación del método de Aproximaciones sucesivas es la determinación del criterio de convergencia, ya que se debe aplicar a todos los métodos abiertos o de punto fijo.

El criterio de convergencia deberá aprobarse para cada una de las aproximaciones sugeridas a las raíces. Por otra parte, puede hacerse una comparación con otros métodos, como Bisección, y se encontrará que resulta más rápido, es decir, se abate el error en menor número de iteraciones. Sin embargo, se observa que no hay garantía de convergencia en todas las aproximaciones.

El método como tal no suele ser muy popular, precisamente por el hecho de no funcionar en la gran mayoría de las ecuaciones a las que se les propone resolver. No obstante, es una opción válida para ser utilizada.

2. Método de Newton-Raphson

El método *Newton Raphson* (N-R) es, junto con Bisección, uno de los más utilizados. Su preferencia radica en su robustez y velocidad para encontrar la raíz cuando la aproximación cumple con su criterio de convergencia. Se aplica a ecuaciones algebraicas y trascendentes y proporciona raíces reales y complejas.

2.1. Definición del método y su interpretación geométrica

El nombre original del método N-R es *de las tangentes*. La tangente es una recta que intersecta a una curva en un sólo punto; en consecuencia, es perpendicular a su radio. A partir de la figura 5, se plantea que en un valor x_0 que represente una aproximación a la raíz de la ecuación, se trace una tangente en el punto $f(x_0)$.

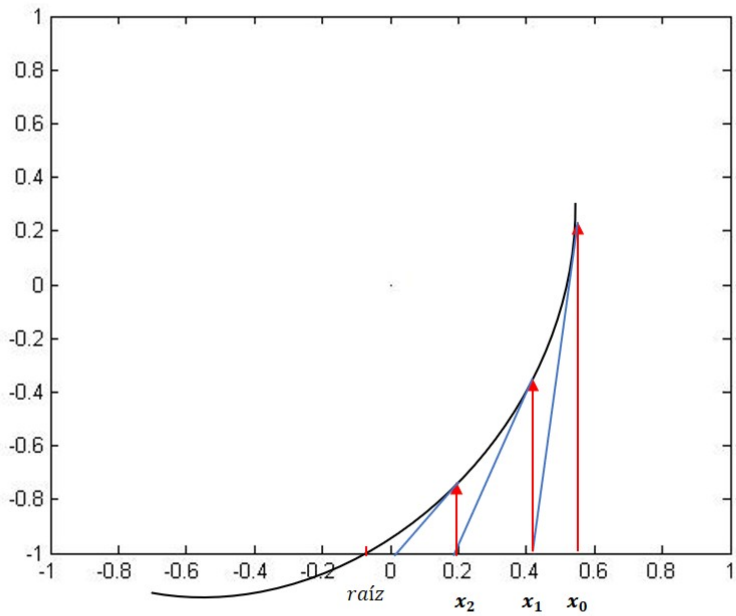

Figura 5: Interpretación geométrica del método Newton-Raphson

Esta recta tangente deberá cortar al eje horizontal y el punto donde esto ocurra será la nueva aproximación x_1, de tal forma que en el punto $f(x_1)$ se trace una nueva tangente. Este proceso se repetirá hasta que el corte de la tangente en el eje horizontal coincida con la raíz de la ecuación, o bien, cuando la diferencia entre dos aproximaciones sucesivas cumpla con una tolerancia preestablecida.

De nuevo a partir de la figura 6, con base en las dos primeras iteraciones, se define la siguiente relación entre el triángulo formado por la recta tangente y el ángulo
theta:

$$tan(\theta) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \tag{17}$$

Por otra parte, se conoce que:

$$f'(x_0) = tan(\theta) \tag{18}$$

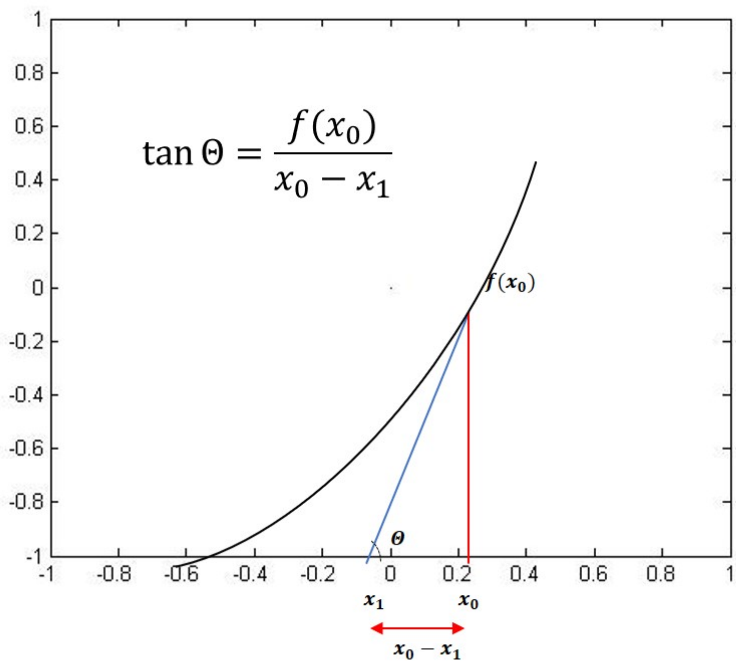

Figura 6: Obtención de la ecuación de recurrencia

Sustituyendo (18) en (17):

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \tag{19}$$

En esta ecuación la incógnita es representada por la iteración siguiente x_1. Despejándola y expresándola en forma iterativa para cualquier iteración:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{20}$$

Este último resultado representa la ecuación de recurrencia del método de N-R.

2.2. Criterio de convergencia

Por ser un método de punto fijo, el criterio de convergencia que deberá cumplirse es:

$$\mid G'(\tau) \mid < 1; \qquad x_{i-1} \leq \tau \leq a \tag{21}$$

Para adaptar la ecuación (21) al método N-R, se sustituye la aproximación τ por x_{i+1}, de acuerdo a lo siguiente:

$$\mid G(x_i) \mid = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{22}$$

De tal forma que debe obtenerse la derivada de la ecuación (22):

$$G'(x_i) = \frac{f(x_i) \cdot f''(x_i)}{[f'(x_i)]^2} \tag{23}$$

Sustituyendo la ecuación (23) con el criterio de convergencia (5):

$$\left| \frac{f(x_i) \cdot f''(x_i)}{[f'(x_i)]^2} \right| < 1 \tag{24}$$

2.3. Ejemplo de aplicación

Encontrar una raíz de la ecuación $f(x) = sen(x) \cdot e^{-x} + 1$. La gráfica de la ecuación es:

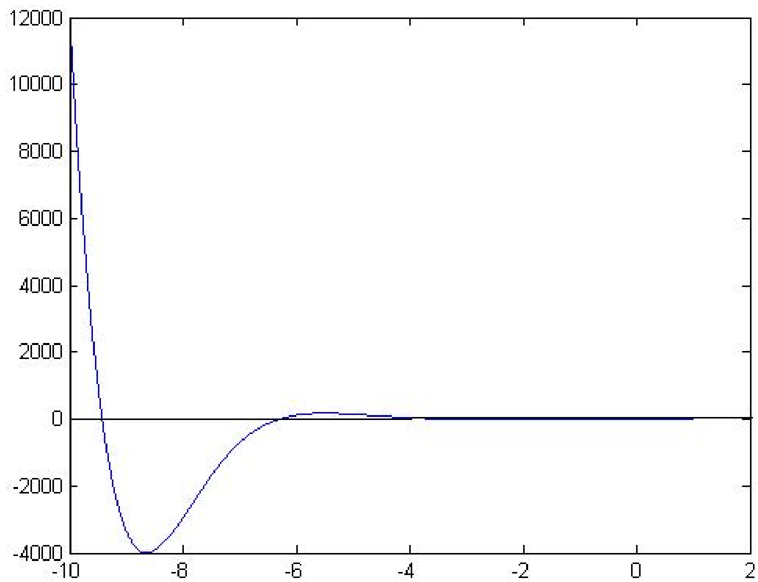

Figura 7: Ejemplo de aplicación

En la figura 7 se observa que la función tiene tres raíces reales en los intervalos $[-8, -6]$, $[-4, -2]$ y $[-2, 0]$. Calculemos cada una de ellas, considerando el criterio de equivalencia en cada una de ellas de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$f(x) = sen(x) \cdot e^{-x} + 1 \tag{25}$$

$$f'(x) = e^{-x} \cdot [cos(x) - sen(x)] \tag{26}$$

$$f''(x) = -2cos(x) \cdot e^{-x} \tag{27}$$

Las ecuaciones (25), (26) y (27) deben sustituirse cada una en la ecuación (24) tomando como primera aproximación a la raíz el punto medio de cada uno de los intervalos [1] y, si el resultado cumple con el criterio de convergencia, utilizar esta aproximación en la ecuación de recurrencia:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{sen(x) \cdot e^{-x} + 1}{e^{-x} \cdot [cos(x) - sen(x)]} \tag{28}$$

[1] Este puede ser un criterio cómoda para localizar una primera aproximación, aunque no es necesario contar con el intervalo

Los respectivos resultados se muestran en las siguientes tablas:

Intervalo 1 (tabla 3): $[-8, -6]$
Primera aproximación: $x_0 = -7$
Criterio de convergencia (ec. (8)): $G(-7) = 0{,}49695$

Cuadro 3: Cálculo de la primera raíz

Iteraciones	i	i+1	Tol
x_0	$-7{,}0000000000$	$-6{,}5349919199$	0,4650080801
x_1	$-6{,}5349919199$	$-6{,}3315600658$	0,2034318542
x_2	$-6{,}3315600658$	$-6{,}2870821650$	0,0444779008
x_3	$-6{,}2870821650$	$-6{,}2850533872$	0,0020287777
x_4	$-6{,}2850533872$	$-6{,}2850492734$	0,0000041138
x_5	$-6{,}2850492734$	$-6{,}2850492734$	0,0000000000

Intervalo 2 (tabla 4): $[-4, -2]$
Primera aproximación: $x_0 = -3$
Criterio de convergencia (ec. (8)): $G(-7) = 0{,}25096$

Cuadro 4: Cálculo de la segunda raíz

Iteraciones	i	i+1	Tol
x_0	$-3{,}0000000000$	$-3{,}1075932380$	0,1075932380
x_1	$-3{,}1075932380$	$-3{,}0964939645$	0,0110992735
x_2	$-3{,}0964939645$	$-3{,}0963639501$	0,0001300144
x_3	$-3{,}0963639501$	$-3{,}0963639324$	0,0000000177
x_4	$-3{,}0963639324$	$-3{,}0963639324$	0,0000000000
x_5	$-3{,}0963639324$	$-3{,}0963639324$	0,0000000000

Intervalo 3 (Tabla 5): $[-2, 0]$
Primera aproximación: $x_0 = -1$
Criterio de convergencia (ec. (8)): $G(-7) = 0{,}26804$

Cuadro 5: Cálculo de la tercer raíz

Iteraciones	i	i+1	Tol
x_0	$-1{,}0000000000$	$-0{,}6572581430$	0,3427418570
x_1	$-0{,}6572581430$	$-0{,}5911831054$	0,0660750376
x_2	$-0{,}5911831054$	$-0{,}5885369458$	0,0026461596
x_3	$-0{,}5885369458$	$-0{,}5885327440$	0,0000042018
x_4	$-0{,}5885327440$	$-0{,}5885327440$	0,0000000000
x_5	$-0{,}5885327440$	$-0{,}5885327440$	0,0000000000

Las respectivas raíces son:

1. $x = -6{,}2850492734$
2. $x = -3{,}0963639324$
3. $x = -0{,}5885327440$

Todas ellas fueron calculadas con una aproximación de diez cifras.

3. Pistas sobre la convergencia del método

De la inspección de la ecuación de recurrencia: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ se observa que para que pueda aplicarse el método debe existir la primera derivada de la función valuada en la aproximación inicial $f'(x_i)$. Esta primera derivada representa la pendiente de la recta tangente en el punto x_i; si esta pendiente es 0 el método no puede aplicarse y deberá buscarse otras opciones.

Este fenómeno se produce en funciones con raíces múltiples. Este se muestra en las siguientes figuras:

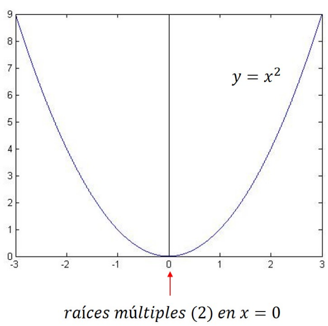

Figura 8: Dos raíces múltiples

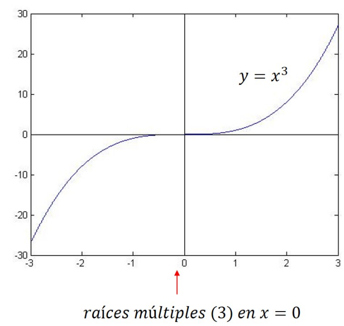

Figura 9: tres raíces múltiples

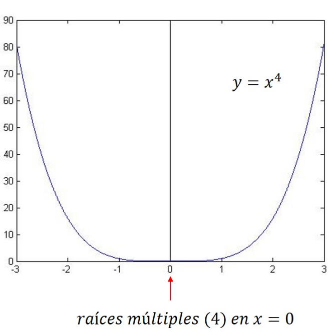

Figura 10: Cuatro raíces múltiples

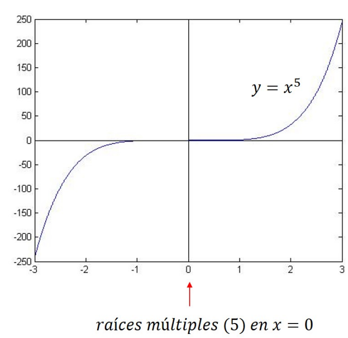

Figura 11: Cinco raíces múltiples

En todos los casos, la raíz es $x = 0$. Si la se utilizan aproximaciones en la vecindad de 0, poco a poco la pendiente de la recta tangente tenderá a cero y método dejará de funcionar.

Por otra parte, en las funciones mostradas, conforme crece el número de raíces múltiples, en números pares (figuras 8 y 10) y en nones (figuras 9 y 11), la pendiente de la tangente tiende a cero; aunque la raíz no sea 0, el método fracasará.

Esto no quiere decir que no se pueda resolver una función con raíces múltiples, existe una versión modificada del método *Newton-Raphson* que contempla esta situación.

3.1. Conclusiones

Como lo muestran las soluciones anteriores, el método de N-R resulta una herramienta ágil y robusta en el cálculo de raíces. Por este motivo es el algoritmo preferido de los fabricantes de calculadoras programables. Para los casos en que no resulta convergente, su complemento ideal resulta del método de Bisección.

De esta forma, se considera que se pueden obtener las raíces reales de prácticamente cualquier ecuación algebraica o trascendente.

Notas

[1] Las figuras y gráficas incluidas en este trabajo fueron elaboradas por los autores

Referencias

Borras, H., Duran, R., y Iriarte, R. (1984). *Apuntes de métodos numéricos* (F. de Ingeniería UNAM, Ed.).
Burden, R., y Faires, D. (2011). *Análisis numérico* (C. Learning, Ed.).
Chapra, S., y Canale, R. (2015). *Métodos numéricos para ingenieros* (M. Hill, Ed.).
García B., S. (2017). *Métodos numéricos.*
Gerald, C. (1991). *Análisis numérico* (Alfaomega, Ed.).
Luthe, R., Olivera, A., y Schutz, F. (1985). *Métodos numéricos.*
Olivera Salazar, A. (s.f.). *Métodos numéricos* (Limusa, Ed.).
Sandoval, H. (2017). *Métodos numéricos.*