Reducción de errores en el método Gauss-Jordan; estrategias de pivoteo

Cortés Rosas Jesús Javier, González Cárdenas Miguel Eduardo
Pinilla Morán Víctor Damián, Salazar Moreno Alfonso
Tovar Pérez Víctor Hugo *

2019

Resumen

Esta publicación pertenece al proyecto *Plataforma educativa para Análisis Numérico*, realizado con al apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE105717.

La obtención de la matriz inversa y la solución de un sistema de ecuaciones lineales se obtienen a través de tres operaciones básicas. Durante la aplicación de estas, sin importar de que no se trate de procesos iterativos, se comenten errores, por lo que es necesario establecer estrategias para minimizar los efectos negativos que pudieran alterar los resultados de la solución. Inicialmente se presentará un panorama de los métodos Gauss y Gauss-Jordan para despúes establecer las estrategias de pivoteo que reducen los errores cometidos.

Los sistemas de ecuaciones son herramientas imprescindibles en la práctica de la Ingeniería. Se utilizan para diversos modelar fenómenos físicos que involucran una multitud de variables y que su comportamiento implica una estrecha relación entre ellas.

La solución de circuitos a través de las Leyes de Kirchhoff, el análisis estructural, la investigación de operaciones son sólo unos pocos ejemplos de la importancia que reviste el uso de los sistemas de ecuaciones.

1. Conceptos generales

La solución de un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto n de valores que satisfacen simultáneamente a un grupo de ecuaciones. En la solución de dicho sistema se presentan tres casos:

1. Que el sistema no tenga solución finita. Se dice entonces que es *incompatible*.
2. Que el sistema tenga solución finita única. En tal caso se dice que es *compatible determinado*.
3. Que tenga más de una solución. El sistema es entonces compatible indeterminado.

* Profesores de la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

En este capítulo se examinarán métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales compatibles determinados que obedecen a la forma :

$$\begin{array}{cccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +... & +a_{1n}x_n = & b_1 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +... & +a_{2n}x_n = & b_2 \\
a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & +... & +a_{3n}x_n = & b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & +... & +a_{nn}x_n = & b_n
\end{array} \tag{1}$$

En forma matricial este sistema se representa como:

$$A\bar{x} = \bar{b} \tag{2}$$

Donde: A es la matriz de coeficientes a_{ij}:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$\bar{x}$ es el vector de incógnitas:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

$\bar{b}$ es el vector de términos independientes:

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{5}$$

2. Métodos de solución basados en el álgebra matricial

La técnica fundamental para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones es el de la *eliminación*; dicho proceso consiste en transformar el sistema original en sistemas equivalentes aplicando las tres operaciones fundamentales sobre las ecuaciones del sistema que son:

1. Intercambiar dos ecuaciones del sistema

2. Multiplicar una ecuación del sistema por un escalar diferente de cero

3. Multiplicar una ecuación del sistema por un escalar diferente de cero y sumar el resultado a otra ecuación del sistema.

Con base en estas tres operaciones fundamentales se definen varios métodos de solución. Cabe indicar que en el desarrollo de estos métodos y en la práctica de las operaciones se utilizan diversos recursos del álgebra matricial, entre ellos el uso de la matriz ampliada o la transformación hacia la matriz identidad. En este trabajo se muestran únicamente los planteamientos de los métodos sin ahondar en las técnicas que se prefieran en su solución.

2.1. Método de Gauss

A través de las operaciones fundamentales aplicadas a la matriz de coeficientes A y al vector de términos independientes $\bar{b}$ (para mantener la igualdad en las ecuaciones), se convierte a la matriz A en una triangular superior donde la diagonal principal la constituyen números 1. Esta transformación implica que en la ecuación n aparezca una sola incógnita, dos en $n-1$, tres en la $n-2$ y así consecutivamente para después realizar una sustitución hacia atrás.

Sea el sistema de ecuaciones lineales $A\bar{x} = \bar{b}$, donde la matriz de coeficientes A corresponde a la forma de (3) y el vector de términos independientes $\bar{b}$ corresponde a la forma (5), la matriz ampliada del sistema es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} & | & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} & | & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} & | & b_n \end{bmatrix} \tag{6}$$

Por medio de las operaciones fundamentales debe transformarse en una matriz ampliada triangular superior de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & ... & a'_{1n} & | & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & ... & a'_{2n} & | & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & ... & a'_{3n} & | & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & | & b'_n \end{bmatrix} \tag{7}$$

donde los valores a'_{ij} y b'_i son los coeficientes modificados por la aplicación de las operaciones fundamentales.

Este procedimiento se logra tomando cada uno de los elementos de la diagonal principal de la matriz A original, al cual se le denomina *pivote* y después normalizando la ecuación con dicho valor. Posteriormente, a través de las operaciones fundamentales, se hace la eliminación de los elementos inferiores de la columna correspondiente al pivote.

Una vez realizada la transformación se realiza la sustitución hacia atrás obteniéndose el valor de cada una de las incógnitas.

2.2. Método de Gauss-Jordan

Es una ampliación del método de Gauss con la diferencia que la matriz de coeficientes A se trasforma en la identidad de tal forma que se conserva una única incógnita por ecuación eliminando la sustitución hacia atrás.

Sea el sistema de ecuaciones lineales $A\bar{x} = \bar{b}$, donde la matriz de coeficientes A corresponde a la forma de (3) y el vector de términos independientes $\bar{b}$ corresponde a la forma (5) y la matriz ampliada al arreglo (6), por medio de las operaciones fundamentales debe transformarse en la matriz identidad de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & | & b'_1 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & | & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & | & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & | & b'_n \end{bmatrix} \tag{8}$$

donde los valores b'_i son los coeficientes modificados por la aplicación de las operaciones fundamentales. De nuevo, el procedimiento utilizado es la elección del pivote, la normalización de las ecuaciones y la eliminación de los elementos superiores e inferiores de la columna del pivote correspondiente.

2.3. Método de la matriz inversa

Es, en esencia, una analogía del método de Gauss-Jordan.

Sea el sistema de ecuaciones lineales $A\bar{x} = \bar{b}$, donde la matriz de coeficientes A corresponde a la forma de (3) y el vector de términos independientes $\bar{b}$ corresponde a la forma (5) y donde A^{-1} es la matriz inversa de A, se cumple que:

$$\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b} \tag{9}$$

2.4. Estrategias de pivoteo para reducir errores

Los métodos de Gauss y Gauss-Jordan, que se basan en el pivoteo, pueden enfrentarse a ciertas dificultades cuando dos ecuaciones (dos renglones de la matriz ampliada) son muy parecidos o, en el peor de los casos, idénticos. Durante la aplicación de las operaciones fundamentales uno de estos renglones se volverá cero, es decir, se eliminará. Esto implica que el número de ecuaciones es $n - 1$, las incógnitas es n y en consecuencia se trata de un sistema compatible indeterminado.

Esta situación es detectada por el álgebra matricial ya que el determinante de la matriz A será cero; A se denominará entonces *matriz singular*. No es posible eliminar la situación relativa a la matriz singular cuando el sistema emana de ua situación tal.

Por otra parte, es imposible realizar la normalización utilizando al elemento ubicado en la diagonal principal cuando este es cero. Una manera de librar este obstáculo es intercambiar renglones para retirar de la diagonal principal elementos de valor cero. Sin embargo, en ocasiones los pivotes tienen valores pequeños comparados al resto de los coeficientes del mismo renglón o bien, tiende a cero. Esta situación provocará errores de redondeo al efectuar la normalización.

Durante el pivoteo necesario para resolver un sistema de ecuaciones debe buscarse cometer el menor error por redondeo posible, esto se logra eligiendo adecuadamente el elemento de la matriz A y no únicamente aquel que está sobre la diagonal principal. Para lograr esto deberán intercambiarse los renglones aún y cuando el elemento de la diagonal principal no sea cero. Los errores se producen al hacer el cociente entre el elemento $a_{i,j}$ de la matriz y $a_{i,i}$ de la diagonal principal, cuando $a_{i,i}$ es relativamente pequeño con respecto a $a_{i,j}$.

Pivoteo diagonal

Es la técnica común de tomar el elemento de la diagonal principal como pivote sin consideración alguna.

Pivoteo parcial

Supóngase un sistema de ecuaciones con un elemento particularmente pequeño con respecto al resto:

$$\begin{aligned} 0{,}001x_1 &+ 72{,}470x_2 = 217{,}430 \\ 6{,}371x_1 &- 5{,}879x_2 = 109{,}783 \end{aligned} \tag{10}$$

En este caso, $a_{1,1} = 0{,}001$ es considerablemente pequeño, primero con $a_{1,2} = 72{,}47$ y después con el resto de los elementos del sistema. La opción recomendada para reducir errores por redondeo es reacomodar el sistema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 6{,}371x_1 &- 5{,}879x_2 = 109{,}783 \\ 0{,}001x_1 &+ 72{,}470x_2 = 217{,}430 \end{aligned} \tag{11}$$

Este reacomodo evita que el elemento considerablemente pequeño sea el pivote del primer renglón. Se propone realizar estos movimientos para evitar dividir entre números de relativamente pequeños.

Pivoteo parcial escalado

Consiste en colocar en la posición pivote el elemento mayor con respecto al resto de los elementos de su renglón. Para facilitar la elección del pivote, se debe detectar el elemento máximo en valor absoluto por cada renglón de la matriz. Por ejemplo, para el sistema ampliado:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 9 & 11 & -9 & | & 47 \\ 0 & 4 & -5 & 8 & 5 & | & 50 \\ 0 & 9 & -4 & 2 & 3 & | & 29 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & -7 & | & 23 \\ 0 & -6 & 5 & 12 & 41 & | & 71 \end{bmatrix} \tag{12}$$

en el cual ya fue reducida la primera columna, por lo que se debe continuar con la segunda columna (el primer renglón no deberá intercambiarse de lugar). Para los renglones 2 a 5, el respectivo elemento de mayor valor absoluto es:

Cuadro 1: Elemento máximo por renglón

Renglón	Posición	Máximo
2	$\lvert a_{2,4}\rvert$	8
3	$\lvert a_{3,2}\rvert$	4
4	$\lvert a_{4,3}\rvert$	8
5	$\lvert a_{5,4}\rvert$	41

Una vez hecha la identificación, divídase el elemento de la columna a eliminar entre el máximo correspondiente:

Renglón 2: $\frac{|a_{2,2}|}{max_2} = \frac{4}{8} = 0{,}5$

Renglón 3: $\frac{|a_{3,2}|}{max_3} = \frac{9}{4} = 2{,}25$

Renglón 4: $\frac{|a_{4,2}|}{max_4} = \frac{5}{8} = 0{,}625$

Renglón 5: $\frac{|a_{5,2}|}{max_5} = \frac{6}{41} = 0{,}146$

Con base en estos resultados, el renglón que tiene el cociente máximo deberá ser el pivote, en este caso el renglón 3, por lo que deberá intercambiarse por el renglón 2:

$$A = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 10 & 9 & 11 & -9 & 47 \\ 0 & 9 & -4 & 2 & 3 & 29 \\ 0 & 4 & -5 & 8 & 5 & 50 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & -7 & 23 \\ 0 & -6 & 5 & 12 & 41 & 71 \end{array}\right] \tag{13}$$

Este proceso deberá repetirse para cada una de las columnas restantes.

Pivoteo completo

Consiste en detectar el elemento máximo en cada renglón y conforme se avance en el pivoteo, reacomodar los renglones para colocarlo en la diagonal principal en la columna correspondiente.

2.5. Conclusiones

Los métodos anteriores suelen ser poco óptimos para resolverse manualmente cuando el sistema corresponde a un orden superior a tres; la situación es similar cuando se diseñan los respectivos algoritmos, principalmente por considerar la elección del pivote, la normalización y las tres operaciones fundamentales. Adicionalmente, el valor del pivote es el factor determinante en la producción y propagación de errores.

El Análisis numérico proporciona herramientas que hacen estos procesos más efectivos, ya sea como versiones alternas a los basados en el álgebra matricial (Descomposición LU) o como métodos iterativos (Jácobi y Gauss-Seidel) con sus correspondientes criterios de convergencia.

Referencias

Borras, H., Duran, R., y Iriarte, R. (1984). *Apuntes de métodos numéricos* (F. de Ingeniería UNAM, Ed.).

Burden, R., y Faires, D. (2011). *Análisis numérico* (C. Learning, Ed.).

García B., S. (2017). *Métodos numéricos.*

Gerald, C., y Wheatley, P. (2000). *Análisis numérico con aplicaciones* (P. Hall, Ed.).

Olivera Salazar, A. (s.f.). *Métodos numéricos* (Limusa, Ed.).

Sandoval, H. (2017). *Métodos numéricos.*