

Métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel

Cortés Rosas Jesús Javier, González Cárdenas Miguel Eduardo
Pinilla Morán Víctor Damián, Salazar Moreno Alfonso
Tovar Pérez Víctor Hugo *

2019

Resumen

Esta publicación pertenece al proyecto *Plataforma educativa para Análisis Numérico*, realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE105717.

Los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel son los procesos de aproximaciones sucesivas para resolver sistemas de ecuaciones lineales compatibles determinados. Ambos requieren de la verificación de un criterio de convergencia comúnmente conocido como diagonal pesada. Son alternativas interesantes para ser programadas por su relativa simplicidad.

En este capítulo se examinarán métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales compatibles determinados que obedecen a la forma :

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\dots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\dots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & +\dots & +a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & +\dots & +a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \quad (1)$$

En forma matricial este sistema se representa como:

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad (2)$$

Donde:

A es la matriz de coeficientes a_{ij} :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (3)$$

*Profesores de la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

\bar{x} es el vector de incógnitas:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

\bar{b} es el vector de términos independientes:

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

1. Métodos iterativos de Jácobi y Gauss-Seidel

Los métodos de Jácobi y Gauss-Seidel son los equivalentes en la solución de sistemas de ecuaciones lineales al método de aproximaciones sucesivas en la solución de ecuaciones algebraicas y trascendentes.

Consiste básicamente en obtener una ecuación de recurrencia (matricial en este caso) y proponer un vector solución inicial; posteriormente, se deberán realizar las iteraciones necesarias hasta que la diferencia entre dos vectores consecutivos cumpla con una tolerancia predefinida.

En realidad, estos métodos representan una adaptación vectorial de un proceso escalar, lo que implica la necesidad de *adaptar* los conceptos necesarios: los procesos iterativos se detienen cuando entre dos aproximaciones consecutivas se cumple con determinado error preestablecido. En este caso, deberá medirse la norma entre dos vectores para reconocer el momento en que se satisface la cota de error.

Por otra parte, resta el hecho de tener que evaluar un criterio de equivalencia el cual, naturalmente, tendrá carácter vectorial.

1.1. Definición del método de Jácobi

Sea el sistema de ecuaciones lineales $A\bar{x} = \bar{b}$, donde A es la matriz de coeficientes, \bar{x} es el vector de incógnitas y \bar{b} el de términos independientes.

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad (6)$$

En la ecuación (6) se puede sustituir a la matriz A por la suma de dos matrices:

$$A = D + R \quad (7)$$

En donde D es una matriz cuyos elementos son cero excepto los ubicados en la diagonal que corresponden a los elementos de la matriz A y R que es una con ceros en la diagonal y sus elementos restantes coinciden con los respectivos de A .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Sustituyendo la ecuación (7) en (6):

$$(D + R) \cdot \bar{x} = \bar{b}$$

$$D\bar{x} + R\bar{x} = \bar{b}$$

despejando el término $D\bar{x}$:

$$D\bar{x} = \bar{b} - R\bar{x}$$

Premultiplicando por la matriz D^{-1}

$$D^{-1} \cdot D\bar{x} = D^{-1} \cdot (\bar{b} - R\bar{x})$$

Resulta:

$$\bar{x} = D^{-1} \cdot (\bar{b} - R\bar{x}) \quad (11)$$

La ecuación (11) no aporta una solución por sí misma si se observa desde la óptica del álgebra matricial. Sin embargo, si se aplica desde una forma recursiva:

$$\bar{x}^{(k+1)} = D^{-1} \cdot (\bar{b} - R\bar{x}^{(k)}) \quad (12)$$

Para $k = 0, 1, 2, \dots, n$ y donde $\bar{x}^{(k)}$ representa un vector solución inicial y $\bar{x}^{(k+1)}$ es una aproximación posterior a $\bar{x}^{(k)}$. Se puede constatar claramente que la ecuación (12) es totalmente representativa de un método de aproximaciones sucesivas.

Esta ecuación (12) requiere de un breve análisis para su aplicación práctica. En principio, la matriz D , detallada en (9) sólo posee elementos diferentes de cero (que corresponden a los propios de A) en su diagonal principal. Es fácilmente comprobable que la matriz inversa D^{-1} también posee únicamente valores diferentes de cero en su diagonal principal y que corresponden a los recíprocos de los ubicados en la matriz A , es decir, serán $\frac{1}{a_{ii}}$. Por otra parte, el resto de los elementos de cada renglón de la matriz A se encuentran en R y son restados del vector de términos independientes.

En contexto, la ecuación (12) equivale, a partir del sistema de ecuaciones lineales, a despejar a la incógnita de ubicada en la diagonal principal de cada una de las ecuaciones que conforman el sistema, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{b_1 - (a_{12}x^{(k_2)} + a_{13}x^{(k_3)} + \dots + a_{1n}x^{(k_n)})}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{b_2 - (a_{21}x^{(k_2)} + a_{23}x^{(k_3)} + \dots + a_{2n}x^{(k_n)})}{a_{22}} \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{b_3 - (a_{31}x^{(k_2)} + a_{32}x^{(k_3)} + \dots + a_{3n}x^{(k_n)})}{a_{33}} \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= \frac{b_n - (a_{n1}x^{(k_2)} + a_{n2}x^{(k_3)} + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)})}{a_{nn}} \end{aligned} \quad (13)$$

El método de Jácobi propone que el vector inicial $\bar{x}^{(0)}$ sea igual a cero. A partir de esta propuesta, el vector siguiente será $\bar{x}^{(1)} = \frac{b_i}{a_{ii}}$, es decir, el elemento independiente entre el coeficiente de la diagonal principal para cada ecuación.

$$\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Este vector $\bar{x}^{(1)}$ se sustituye en las ecuaciones (13) obteniéndose el siguiente vector $x^{(2)}$. El proceso se realiza consecutivamente hasta que la norma entre dos vectores consecutivos sea menor que cierta tolerancia preestablecida.

La norma θ se calcula como:

$$\theta = \sqrt{(x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)})^2 + (x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)})^2 + (x_3^{(k+1)} - x_3^{(k)})^2 + \dots + (x_n^{(k+1)} - x_n^{(k)})^2} \quad (15)$$

1.2. Criterio de convergencia del Método de Jácobi

El método de Jácobi es susceptible de los efectos del pivoteo. En consecuencia, su criterio de convergencia lo conforman los criterios de la diagonal dominante, mismo que posee dos condiciones:

1. Condición necesaria: Que el elemento ubicado en la diagonal principal de cada ecuación sea mayor en valor absoluto que el resto de los elementos de la misma ecuación.

$$|a_{ii}| > |a_{ij}| \quad (16)$$

2. Condición suficiente: Que el elemento ubicado en la diagonal principal de cada ecuación sea mayor en valor absoluto que la suma del resto de los elementos de la misma ecuación.

$$|a_{ii}| > \sum |a_{ij}| \quad (17)$$

1.3. Método de Gauss-Seidel

Este método es una versión acelerada de Jácobi. En el cual es necesario contar con un vector aproximado completo para proceder a la sustitución en las ecuaciones de recurrencia y obtener una nueva aproximación.

En el método de Gauss-Seidel se propone ir sustituyendo los nuevos valores de la aproximación siguiente conforme se vayan obteniendo sin esperar a tener un vector completo. De esta forma se acelera la convergencia.

A partir de las ecuaciones de recurrencia del método de Jácobi (13):

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k)})}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{b_2 - (a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \dots + a_{2n}x_n^{(k)})}{a_{22}} \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{b_3 - (a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + \dots + a_{3n}x_n^{(k)})}{a_{33}} \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= \frac{b_n - (a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)})}{a_{nn}} \end{aligned} \quad (18)$$

1.4. Criterio de convergencia del Método de Gauss - Seidel

El criterio de convergencia del método de Gauss-Seidel corresponde totalmente a de la diagonal dominante cuyas condiciones se expresan en las ecuaciones (16) y (17).

1.5. Ejemplo de aplicación

Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 &= 9 \\ -2x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 51 \end{aligned} \quad (19)$$

Antes de proceder en la solución respectiva, se observa que los elementos ubicados en la diagonal principal cumplen satisfactoriamente con el criterio de convergencia o diagonal dominante. Dado lo anterior, se resolverá el sistema utilizando ambos métodos para contrastar su uso. Se Inicia por el método de Jácobi. Las ecuaciones de recurrencia son:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{3-x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}}{10} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{9-4x_1^{(k)}+x_3^{(k)}}{6} \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{51+2x_1^{(k)}-3x_2^{(k)}}{8} \end{aligned} \quad (20)$$

La primera iteración $k = 1$ es:

$$\begin{aligned} \bar{x}^{(1)} &= \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{9}{6} \\ \frac{51}{8} \end{bmatrix} \\ \bar{x}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0,3 \\ 1,5 \\ 6,375 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

La segunda iteración $k = 2$ se obtiene sustituyendo al vector $\bar{x}^{(1)}$ (21) en las ecuaciones de recurrencia (20).

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{3-(1,5)-2(6,375)}{10} \\ x_2^{(2)} &= \frac{9-4 \cdot (0,3)+6,375}{6} \\ x_3^{(2)} &= \frac{51+2 \cdot (0,3)-3 \cdot (1,5)}{8} \\ \bar{x}^{(2)} &= \begin{bmatrix} -1,125 \\ 2,3625 \\ 5,8875 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

Las sucesivas iteraciones se muestran en los cuadros 1 y 2. Las tolerancias son calculadas con la ecuación (15):

Se dice entonces que después de trece iteraciones, con una tolerancia = 0,000007, el vector solución es:

Cuadro 1: Iteraciones 0 a 6 por el método de Jácobi

Iteración	$x^{(0)}$	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$	$x^{(5)}$	$x^{(6)}$
$x_1 =$	0.30000	-1.12500	-1.11375	-1.06469	-0.98802	-0.99087	-0.99705
$x_2 =$	1.50000	2.36250	3.23125	3.11047	3.02393	2.98241	2.99292
$x_3 =$	6.37500	5.88750	5.20781	4.88484	4.94240	4.99402	5.00888
Tolerancia		1.73557	1.10310	0.34829	0.12915	0.06631	0.01922

Cuadro 2: Iteraciones 7 a 12 en el método de Jácobi

Iteración	$x^{(7)}$	$x^{(8)}$	$x^{(9)}$	$x^{(10)}$	$x^{(11)}$	$x^{(12)}$
$x_1 =$	-1.00107	-1.00063	-1.00011	-0.99991	-0.99996	-1.00000
$x_2 =$	2.99951	3.00128	3.00041	2.99997	2.99991	2.99998
$x_3 =$	5.00339	4.99992	4.99936	4.99982	5.00003	5.00004
Tolerancia	0.00947	0.00392	0.00116	0.00066	0.00023	0.00007

$$\bar{x}^{(12)} = \begin{bmatrix} -1,00000 \\ 2,99998 \\ 5,00004 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Ahora se realizará la solución atendiendo la mejora en el método Gauss-Seidel. Las ecuaciones de recurrencia son:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{3-x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}}{10} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{9-4x_1^{(k+1)}+x_3^{(k)}}{6} \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{51+2x_1^{(k+1)}-3x_2^{(k+1)}}{8} \end{aligned} \quad (24)$$

La iteración $x^{(1)}$ se obtiene de la misma forma que la indicada en el vector (21):

$$\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 1,5 \\ 6,375 \end{bmatrix} \quad (25)$$

La diferencia se presenta en el cálculo de la iteración $x^{(2)}$:

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{3-(1,5)-2(6,375)}{10} = -1,125 \\ x_2^{(2)} &= \frac{9-4(-1,125)+6,375}{6} = 3,3125 \\ x_3^{(2)} &= \frac{51+2(-1,125)-3(3,3125)}{8} = 4,85156 \end{aligned}$$

$$\bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1,125 \\ 3,3125 \\ 4,85156 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Repetiendo el proceso consecutivamente, mismo que se presenta en el cuadro 3:

Cuadro 3: Iteraciones por el método de Jácobi

Iteración	$x^{(0)}$	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$	$x^{(5)}$
x_1	0.30000	-1.125	-1.0015625	-0.999329427	-1.000057753	-0.999997259
x_2	1.50000	3.3125	2.976302083	3.000968967	3.000005882	2.999995399
x_3	6.37500	4.8515625	5.008496094	4.999804281	4.999983356	5.000002411
Tolerancia		2.763447678	0.391016634	0.026248607	0.00122068	$6.42839 \cdot 10^{(-5)}$

Se dice entonces que después de seis iteraciones, con una tolerancia = $6,42839 \cdot 10^{(-5)}$, el vector solución es:

$$\bar{x}^{(12)} = \begin{bmatrix} -0,999997259 \\ 2,999995399 \\ 5,000002411 \end{bmatrix} \quad (27)$$

La tolerancia es calculada por medio de la ecuación (15).

1.6. Conclusiones

Se concluye en dos sentidos diferentes: Primeramente, debe percibirse que el método de Jácobi es un antecedente del método de Gauss-Seidel, mismo que lo mejora de forma notable al acelerar su convergencia. En segundo término, pero no menos importante, estos métodos del género de las aproximaciones sucesivas dependen fundamentalmente de su criterio de convergencia. En este caso, de la diagonal dominante.

Es difícil determinar *qué tan dominante es una diagonal*. No se establece una convención que nos diga la relación que debe guardar el elemento a_{ii} sobre el resto de los coeficientes a_{ij} de su ecuación. En todo caso, entre más evidente sea el dominio de los elementos sobre la diagonal principal, más rápida será la convergencia de la solución.

Referencias

- Borras, H., Duran, R., y Iriarte, R. (1984). *Apuntes de métodos numéricos* (F. de Ingeniería UNAM, Ed.).
- Burden, R., y Faires, D. (2011). *Análisis numérico* (C. Learning, Ed.).
- García B., S. (2017). *Métodos numéricos*.
- Gerald, C., y Wheatley, P. (2000). *Análisis numérico con aplicaciones* (P. Hall, Ed.).

Olivera Salazar, A. (s.f.). *Métodos numéricos* (Limusa, Ed.).
Sandoval, H. (2017). *Métodos numéricos*.