Esquemas de derivación numérica. Extrapolación de Richardson

Cortés Rosas Jesús Javier, González Cárdenas Miguel Eduardo
Pinilla Morán Víctor Damián, Salazar Moreno Alfonso
Tovar Pérez Víctor Hugo *

2019

Resumen

Esta publicación pertenece al proyecto *Plataforma educativa para Análisis Numérico*, realizado con al apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE105717.

En los procesos de ingeniería que se modelan a través de una función tabular, los polinomios interpolantes permiten operaciones básicas sin la necesidad de contar con una expresión matemática. En la derivación de una función tabular se obtiene el valor de la derivada en un punto determinado (la pendiente de la curva tangente) y dependiendo del número de puntos disponibles será el orden del error cometido. Se mostrarán los aspectos propios de una interpolación con espaciamiento constante.

Las técnicas de interpolación numérica proporcionan las herramientas para obtener las funciones analíticas de funciones tabulares que comúnmente son la materia prima de los procesos propios de las prácticas de la Ingeniería.

Sin embargo, cuando se dispone de una función tabular compuesta de un número tal de puntos que hace poco práctica la obtención de la expresión analítica, no resulta sencillo obtener las derivadas (o las integrales) de dicha función. Las siguientes herramientas de derivación numérica permiten obtener la derivada de la función en cualesquiera de los puntos seleccionados, sin necesidad de recurrir a la expresión analítica.

Por tratarse de una herramienta del análisis numérico, los resultados obtenidos serán los valores numéricos de la derivada de una función en un punto. Si se desea obtener como resultado una expresión analítica, corresponde obtener inicialmente dicha función, ya sea por algún polinomio interpolante o por la interpolación de Lagrange y después derivarla.

1. Derivación numérica

Sea $y = f(x)$ una función tabular continua con n puntos que puede aproximarse a un polinomio de grado $n-1$ que pasa por todos los puntos incluidos en su forma tabular y cuya variable independiente es equiespaciada con paso $h = cte$, el polinomio interpolante que la representa es:

*Profesores de la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

$$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + ... \tag{1}$$

Donde: $k = \frac{x_k - x_0}{h}$

Se propone derivar la ecuación (1) con respecto a la variable independiente x. Dada la estructura de esta ecuación, es necesario aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dk} \cdot \frac{dk}{dx} \tag{2}$$

$$\frac{dk}{dx} = \frac{1}{h} \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dk} = \Delta y_0 + \frac{2k-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3k^2 - 6k + 2}{3!}\Delta^3 y_0 + ... \tag{4}$$

Sustituyendo las ecuaciones (3) y (4) en (2) se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2k-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3k^2 - 6k + 2}{3!}\Delta^3 y_0 + ...\right] \tag{5}$$

Esta última ecuación (5) representa la primera derivada del polinomio interpolante que representa a la función tabular.

Derivando a (5) y utilizando de nuevo la regla de la cadena mostrada en la ecuación (2):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (k-1)\Delta^3 y_0 + ...\right] \tag{6}$$

Derivando de nuevo:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_0 + ...\right] \tag{7}$$

El proceso puede repetirse las veces que se considere necesario, nótese que al aumentar el orden de la derivada deseada debe aumentarse el orden del polinomio interpolante.

Retomando la ecuación (5). Si se trunca el polinomio interpolante hasta la primera diferencia y se sustituye a dicha diferencia por los puntos que la conforman en el orden en que aparecen en la función tabular se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{h}\left[\Delta y_0\right] + e_r \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{h}\left[y_1 - y_0\right] + e_r \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{h}\left[-y_0 + y_1\right] + e_r \end{aligned} \tag{8}$$

Analizando esta última ecuación se percibe que por provenir de un polinomio interpolante truncado a la primera diferencia resulta sólo función de dos puntos provenientes de la función tabular: (x_0, y_0) y (x_1, y_1). El polinomio que une a dos puntos es de grado $n = 1$, es decir, una línea recta que sólo puede ser derivada en una ocasión (dado que el valor de la siguiente derivada sería 0). Por otra parte, la interpretación que hace el Cálculo diferencial de la derivada en el valor de la pendiente de la recta tangente en determinado punto de la curva a derivar.

La consideración sobre la obtención de la derivada en un punto es importante en este desarrollo, ya que el resultado del uso de las técnicas de interpolación es obtener el valor de la pendiente de la recta tangente, no su expresión analítica.

Es por esto que de acuerdo al polinomio interpolante seleccionado debe especificarse claramente su orden de interpolación y, en consecuencia, el punto en el cual desea obtenerse la derivada. Este punto seleccionado se denomina *pivote*.

Para la ecuación (8) se establece como pivote al punto (x_0, y_0); para indicarlo se subraya el coeficiente respectivo. Por otra parte, a manera de establecer una notación más práctica, se eliminan los indicativos de las ordenadas de la ecuación dejándose sólo los coeficientes, pero en todo caso, la ecuación de derivación numérica contempla siempre iniciar en la ordenada y_0.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\left[-y_0 + y_1\right] + e_r$$

Si se toma el punto (x_0, y_0) para obtener la pendiente de la recta tangente, el pivote será precisamente ese punto por lo que en el esquema de derivación se subraya la coordenada correspondiente:

$$y'_{x=x_0} = \frac{1}{h}\left[\, \underline{-1}\, ,\ 1\, \right] + e_r \tag{9}$$

Finalmente, e_r representa el error que debe añadirse a la ecuación (9) para que el valor sea exacto. El cálculo del error merece ser analizado en forma separada, pero se adelanta que se obtiene una aproximación a él por medio del criterio del término siguiente.

Ahora bien, si se desea obtener fórmulas con menor error intrínseco se propone que la ecuación (5) sea truncada a partir de la segunda diferencia.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2k-1}{2!}\Delta^2 y_0\right] e_r \tag{10}$$

Las ecuaciones que se obtengan de (10) se denominarán de *segundo orden de interpolación*. Al tomar en cuenta una segunda diferencia se consideran a los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de la función tabular. En consecuencia, la derivada obtenida en cada punto sea diferente. Dado lo anterior, deben calcularse tres ecuaciones particulares para obtener las derivadas valuadas en (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2) respectivamente.

- Para la derivada en (x_0, y_0). El punto pivote se ubica en el primer punto de la función tabular. Esto tiene como consecuencia que en $k = \frac{x_k - x_0}{h}$ el valor de referencia es el propio $x_k = x_0$, por lo que $k = 0$. Sustituyendo este valor y los respectivos de las diferencias en la ecuación (10) se obtiene:

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dx} &= \tfrac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \tfrac{2k-1}{2!}\Delta^2 y_0\right] + e_r \\ \tfrac{dy}{dx} &= \tfrac{1}{h}\left[(y_1 - y_0) - \tfrac{1}{2}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right] + e_r \end{aligned}$$

Factorizando se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2h}\left[-3y_0 + 4y_1 - y_2\right] + e_r$$

Modificando la notación:

$$y'_{x=x_0} = \frac{1}{2h}\left[\,\underline{-3}\,,\ 4\,,\ -1\,\right] + e_r \tag{11}$$

- Para la derivada en (x_1, y_1). El punto pivote se ubica en el segundo punto de la función tabular. Esto tiene consecuencia que en $k = \frac{x_k - x_0}{h}$ el valor de referencia es $x_k = x_1$, por lo que $k = 1$. Sustituyendo este valor y los respectivos de las diferencias en la ecuación (10) se obtiene:

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dx} &= \tfrac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \tfrac{2k-1}{2!}\Delta^2 y_0\right] + e_r \\ \tfrac{dy}{dx} &= \tfrac{1}{h}\left[(y_1 - y_0) + \tfrac{1}{2}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right] + e_r \end{aligned}$$

Factorizando se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2h}\left[-y_0 + y_2\right] + e_r$$

Modificando la notación:

$$y'_{x=x_1} = \frac{1}{2h}\left[\,-1\,,\ \underline{0}\,,\ 1\,\right] + e_r \tag{12}$$

- Para la derivada en (x_2, y_2). El punto pivote se ubica en el segundo punto de la función tabular. Esto tiene consecuencia que en $k = \frac{x_k - x_0}{h}$ el valor de referencia es $x_k = x_2$, por lo que $k = 2$. Sustituyendo este valor y los respectivos de las diferencias en la ecuación (10) se obtiene:

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dx} &= \tfrac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \tfrac{2k-1}{2!}\Delta^2 y_0\right] + e_r \\ \tfrac{dy}{dx} &= \tfrac{1}{h}\left[(y_1 - y_0) + \tfrac{3}{2}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right] + e_r \end{aligned}$$

Factorizando se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2h}\left[y_0 - 4y_1 + 3y_2\right] + e_r$$

Modificando la notación:

$$y'_{x=x_2} = \frac{1}{2h}\left[\,1\,,\ -4\,,\ \underline{3}\,\right] + e_r \tag{13}$$

Este proceso debe seguirse para definir otras formas de derivación numérica, incluso para derivadas de orden superior, por ejemplo, en la ecuación (), la segunda derivad obliga mínimo a un segundo orden de interpolación:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0\right] = \frac{1}{h^2}\left[y_2 - 2y_1 + y_0\right] + e_r$$

En esta ecuación, el pivote está en el punto central:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left[1\,,\ \underline{-2},\ 1\right] + e_r \tag{14}$$

Estos son los esquemas de derivación comúnmente utilizados:

Primer orden de interpolación

$$y'_{x=x_0} = \frac{1}{h}\,[\,\underline{-1}\,,\,1\,] + e_r \tag{15}$$

Segundo orden de interpolación

$$y'_{x=x_0} = \frac{1}{2h}\,[\,\underline{-3}\,,\,4\,,\,-1\,] + e_r \tag{16}$$

$$y'_{x=x_1} = \frac{1}{2h}\,[\,-1\,,\,\underline{0}\,,\,1\,] + e_r \tag{17}$$

$$y'_{x=x_2} = \frac{1}{2h}\,[\,1\,,\,-4\,,\,\underline{3}\,] + e_r \tag{18}$$

$$y''_{x=x_1} = \frac{1}{h^2}\,[\,1\,,\,\underline{-2}\,,\,1\,] + e_r \tag{19}$$

Tercer orden de interpolación

$$y'_{x=x_0} = \frac{1}{6h}\,[\,\underline{-11}\,,\,18\,,\,-9\,,\,2\,] + e_r \tag{20}$$

$$y'_{x=x_1} = \frac{1}{6h}\,[\,-2\,,\,\underline{-3}\,,\,6\,,\,-1\,] + e_r \tag{21}$$

$$y'_{x=x_2} = \frac{1}{6h}\,[\,1\,,\,-6\,,\,\underline{3}\,,\,2\,] + e_r \tag{22}$$

$$y'_{x=x_3} = \frac{1}{6h}\,[\,-2\,,\,9\,,\,-18\,,\,\underline{11}\,] + e_r \tag{23}$$

$$y''_{x=x_0} = \frac{1}{h^2}\,[\,\underline{2}\,,\,-5\,,\,4\,,\,-1\,] + e_r \tag{24}$$

$$y''_{x=x_1} = \frac{1}{h^2}\,[\,1\,,\,\underline{-2}\,,\,1\,,\,0\,] + e_r \tag{25}$$

$$y''_{x=x_3} = \frac{1}{h^2}\,[\,0\,,\,1\,,\,\underline{-2}\,,\,1\,] + e_r \tag{26}$$

$$y''_{x=x_4} = \frac{1}{h^2}\,[\,-1\,,\,4\,,\,-5\,,\,\underline{2}\,] + e_r \tag{27}$$

Como una técnica de comprobación de la correcta conformación de todas estas fórmulas, los coeficientes que las forman siempre deben sumar 0.

Es necesario resaltar la relación que existe entre el orden de la derivada y el orden de interpolación (orden de la diferencia máxima del polinomio interpolante) de cada fórmula. Si se desea obtener la segunda derivada de una función, para que este valor no sea 0 es necesario que el orden del polinomio del cual procede sea al menos de 2; para lograr esto, la función deberá ser aproximada a través de un polinomio compuesto por 3 puntos por lo que debe considerar hasta la segunda diferencia. En consecuencia, el menor orden de interpolación disponible para obtener una fórmula de segunda derivada debe ser, precisamente, de segundo orden de interpolación.

2. Análisis del error

Sea el polinomio de Taylor:

$$y = y_0 + (x - x_0)y_0' + \frac{(x-x_0)^2}{2!}y_0'' + \frac{(x-x_0)^3}{3!}y_0''' + \frac{(x-x_0)^4}{4!}y_0^{IV} + ... \tag{28}$$

Si $x = x_1$ se tiene que $x_1 - x_0 = h$, sustituyendo en (28):

$$y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2!}y_0'' + \frac{h^3}{3!}y_0''' + \frac{h^4}{4!}y_0^{IV} + ... \tag{29}$$

Despejando y_0':

$$y_0' = \frac{1}{h}\left[y_1 - y_0 - \frac{h^2}{2!}y_0'' - \frac{h^3}{3!}y_0''' - \frac{h^4}{4!}y_0^{IV} - ...\right] \tag{30}$$

Esta ecuación puede expresarse como:

$$y_0' = \frac{1}{h}\left[-y_0 + y_1\right] - \frac{h}{2!}y_0'' - \frac{h^2}{3!}y_0''' - \frac{h^3}{4!}y_0^{IV} + ... \tag{31}$$

Puede observarse que la primera parte de la fórmula coincide plenamente con la de la primera derivada numérica de primer orden de interpolación mostrado en la ecuación (15). de acuerdo al criterio del término siguiente podemos aproximar el error cometido en el uso de esta fórmula por el primer término $\frac{h}{2!}y_0''$. Como seguramente sucederá, no se conoce el valor de y_0'', por lo que en forma convencional se dice que el orden de error está en función del valor de h, lo cual suele denotarse por $O(h)$. En conclusión, se dice que el esquema de la primera derivada numérica de primer orden de interpolación tiene un orden de error de $O(h)$.

$$y'_{x=x_0} = \frac{1}{h}\left[\,\underline{-1}\,,\ 1\,\right] + O(h) \tag{32}$$

Haciendo un proceso similar en la ecuación (28) cuando $x = x_2$ se tiene que $x_2 - x_0 = 2h$:

$$y_2 = y_0 + 2hy_0' + 2h^2y_0'' + \frac{4h^3}{3}y_0''' + \frac{2h^4}{3}y_0^{IV} + ... \tag{33}$$

Si a la ecuación (33) se le resta cuatro veces la ecuación (29) se tiene:

$$\begin{aligned} y_2 - 4y_1 = & \left[y_0 + 2hy_0' + 2h^2y_0'' + \tfrac{4h^3}{3}y_0''' + \tfrac{2h^4}{3}y_0^{IV} + ...\right] - \\ y_2 - 4y_1 = & \left[4y_0 + 4hy_0' + h^2y_0'' + \tfrac{2h^3}{3}y_0''' + \tfrac{h^4}{3}y_0^{IV} + ...\right] \\ y_2 - 4y_1 = & -3y_0 - 2hy_0' + \tfrac{2h^3}{3}y_0''' - \tfrac{h^4}{3}y_0^{IV} + ... \end{aligned} \tag{34}$$

Despejando y_0':

$$y_0' = \frac{1}{2h}\left[-3y_0 + 4y_1 - y_2 - \frac{2h^3}{3}y_0''' + \frac{h^4}{3}y_0^{IV} + ...\right] \tag{35}$$

Que puede expresarse como:

$$y_0' = \frac{1}{2h}\left[-3y_0 + 4y_1 - y_2\right] - \frac{h^2}{3}y_0''' + \frac{h^4}{6}y_0^{IV} + ... \tag{36}$$

Por lo que de acuerdo al criterio del término siguiente se concluye que dicha fórmula, y en general todas las que provengan de un esquema de interpolación de segundo orden, tiene un orden de error de $O(h^2)$.

Se percibe lo importante que resulta elegir un buen orden de interpolación, el tamaño del paso h es determinante para obtener cotas menores de error.

Consideraciones finales

- Cuando las ecuaciones para aproximar a la derivada emplean sólo puntos a la derecha del punto pivote se les denominan *fórmulas de diferencias finitas hacia atrás*; lo cual implica que el valor de la derivada depende sólo de valores de la función de (x_i, y_i) y previos.
- Cuando las ecuaciones para aproximar a la derivada emplea el mismo número de puntos a la derecha que a la izquierda del punto pivote se les denomina de *diferencias centrales*.
- La evaluación de la enésima derivada de la función sólo depende de los valores y_i y de sus vecinos; es decir, no incluye derivadas de menor orden, por lo cual no es necesario efectuar derivadas sucesivas.
- Se recomienda emplear esquemas de diferencias centrales por ser más precisos que el resto.

2.1. Ejemplo de aplicación

Para la función definida en forma tabular:

X	Y
1,8	10,8894
1,9	12,7032
2,0	14,7781
2,1	17,1490
2,2	19,8550

Obtener:

- $f'(2{,}0)$ a partir de un esquema de interpolación de segundo orden. El punto pivote para este cálculo es $(2{,}0, 14{,}7781)$. Para la elección de una de las tres fórmulas disponibles dentro del esquema de interpolación de segundo orden debe contemplarse que de acuerdo a la posición del punto pivote en la función tabular se dispone de puntos hacia atrás y hacia adelante del mismo. De acuerdo a las recomendaciones, cabe elegir una fórmula de diferencias centrales:

$$y'_{x=x_1} = \frac{1}{2h}\,[\,-1\,,\,\underline{0}\,,\,1\,] + e_r$$

Sustituyendo valores para $h = 0{,}1$:

$$y'_{x=2{,}0} = \tfrac{1}{2(0{,}1)}\,[-12{,}7032 + 0(14{,}7781) + 17{,}1490]$$
$$y'_{x=2{,}0} = 22{,}2290$$

- $f'(2{,}2)$ a partir de un esquema de interpolación de segundo orden. De nuevo, por la ubicación del punto pivote sólo es posible utilizar una fórmula de diferencias finitas hacia atrás, por lo cual la fórmula aconsejada es:

$$y'_{x=x_2} = \frac{1}{2h}\,[\,1\,,\,-4\,,\,\underline{3}\,] + e_r$$

Sustituyendo valores para $h = 0{,}1$:

$$y'_{x=2{,}2} = \tfrac{1}{2(0{,}1)}\,[14{,}7781 - 4(17{,}1490) + 3(19{,}8550)]$$
$$y'_{x=2{,}2} = 28{,}7355$$

- $f''(2{,}0)$ a partir de un esquema de interpolación de segundo orden. Utilizando las misma consideraciones la fórmula recomendada es:

$$y''_{x=x_1} = \frac{1}{h^2}\,[\,1\,,\,\underline{-2}\,,\,1\,] + e_r$$

Sustituyendo valores para $h = 0{,}1$:

$$y''_{x=2{,}0} = \tfrac{1}{(0{,}1)^2}\,[12{,}7032 - 2(14{,}7781) + 17{,}1490]$$
$$y''_{x=2{,}0} = 29{,}6$$

3. Conclusiones

Los resultados obtenidos demuestran a su vez la relevancia de las herramientas de interpolación, en este caso, para funciones tabulares equiespaciadas.

Las cotas de error, que pueden ser razonablemente estimadas, están en función, primordialmente, del tamaño del paso h. Si se considera, como un ejemplo, la aplicación a un sistema de muestreo a intervalos de tiempo muy pequeños puede percibirse que en la vida real los esquemas mostrados son muy pertinentes.

4. Derivación para datos no equiespaciados

Sea la función en forma tabular:

X	Y
x_{i-1}	y_{i-1}
x_i	y_i
x_{i+1}	y_{i+1}

Que considera un punto central más otros dos, uno antes y otro después de él. El polinomio de Lagrange que pasa por los tres puntos es:

$$y = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}y_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}y_i + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}y_{i+1}$$

$$y = \frac{x^2-x(x_i+x_{i+1})+x_ix_{i+1}}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}y_{i-1} + \frac{x^2-x(x_{i-1}+x_{i+1})+x_{i-1}x_{i+1}}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}y_i + \frac{x^2-x(x_{i-1}+x_i)+x_{i-1}x_i}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}y_{i+1}$$

Derivando con respecto a x:

$$y' = \frac{2x-(x_i+x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}y_{i-1} + \frac{2x-(x_{i-1}+x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}y_i + \frac{2x-(x_{i-1}+x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}y_{i+1} \tag{37}$$

Ejemplo de aplicación

Obtener la derivada de la función y expresada en forma tabular en el punto $x = 5$.

X	Y
1	-4
3	-10
7	2

Sustituyendo en la ecuación (37):

$$y'|_{x=5} = \frac{2(5)-3-7}{(1-3)(1-7)}(-4) + \frac{2(5)-1-7}{(3-1)(3-7)}(-10) + \frac{2(5)-1-3}{(7-1)(7-3)}(2) = 3$$

La función tabular proviene de $y = x^2 - 7x + 2$, cuya derivada es $y' = 2x - 7$. Sustituyendo $x = 5$ se obtiene el resultado antes mostrado.

5. Extrapolación de Richardson

Se he mencionado que durante el uso de polinomios interpolantes existen dos formas de reducir el error:

1. Utilizar un h muy pequeño
2. Incrementar el orden de interpolación

Un tercer recurso es la *Extrapolación de Richardson* (Olivera Salazar, s.f.) que consiste en utilizar dos aproximaciones de la una derivada para obtener una tercera con menor índice de error.

Sea Q el valor verdadero de una derivada o una integral de la función que se trata de valuar y Q_1 y Q_2 dos valores aproximados de un intervalo al dividir un intervalo considerando n_1 y n_2 partes iguales respectivamente, creando subintervalos de amplitudh_1 y h_2 respectivamente, es decir:

$$h_1 = \frac{x_n - x_0}{n_1} \qquad h_2 = \frac{x_n - x_0}{n_2}$$

Si Q_1 y Q_2 fueron determinados con fórmulas que dan errores del orden de $O(h^n)$, se puede escribir que el error es $e = c \cdot h^n$ más términos con potencias superiores de h. Si se acepta que el primer término como el más importante, lo cual ocurre si h es pequeño, se tiene:

$$\begin{gathered} Q = Q_1 + c \cdot h_1^n \\ \tfrac{Q}{h_1^n} = \tfrac{Q_1}{h_1^n} + \tfrac{c \cdot h_1^n}{h_1^n} \\ \tfrac{Q}{h_1^n} - \tfrac{Q_1}{h_1^n} = c \end{gathered}$$

Análogamente para h_2:

$$\begin{gathered} Q = Q_2 + c \cdot h_1^n \\ \tfrac{Q}{h_2^n} = \tfrac{Q_2}{h_2^n} + \tfrac{c \cdot h_2^n}{h_2^n} \\ \tfrac{Q}{h_2^n} - \tfrac{Q_2}{h_2^n} = c \end{gathered}$$

Igualando:

$$\begin{gathered} \tfrac{Q}{h_1^n}\tfrac{Q_1}{h_1^n} = \tfrac{Q}{h_2^n}\tfrac{Q_2}{h_2^n} \\ Q\left[\tfrac{1}{h_1^n} - \tfrac{1}{h_2^n}\right] = \tfrac{Q_1}{h_1^n} - \tfrac{Q_2}{h_2^n} \\ Q\left[\tfrac{h_2^n - h_1^n}{h_1^n - h_2^n}\right] = \tfrac{Q_1 h_2^n - Q_2 h_1^n}{h_1^n h_2^n} \\ Q = \tfrac{Q_1 h_2^n - Q_2 h_1^n}{h_2^n - h_1^n} \end{gathered}$$

Dividiendo el segundo miembro, numerador y denominadora, entre h_1:

$$Q = \frac{\frac{Q_1 h_2^n - Q_2 h_1^n}{h_1^n}}{\frac{h_2^n - h_1^n}{h_1^n}} = \frac{\frac{Q-1h_2^n}{h_1^n} - Q_2}{\frac{h_2^n}{h_1^n} - 1}$$

$$Q = \frac{(\frac{h_2}{h_1})^n Q_1 - Q_2}{(\frac{h_2}{h_1})^n - 1} \tag{38}$$

La ecuación (38) es conocida como la Extrapolación de Richardson.

5.1. Ejemplo de aplicación

A través de polinomios interpolantes se obtuvo el área bajo la curva (Olivera Salazar, s.f.) de una función tabular con dos parámetros diferentes:

- Con $h_1 = \frac{\pi}{8}$ se obtuvo $I_1 = 0{,}987$
- Con $h_2 = \frac{\pi}{12}$ se obtuvo $I_2 = 0{,}994$

Utilice la Extrapolación de Richardson para mejorar el resultado. Utilizando la fórmula (38) se obtiene:

$$\frac{\left[\frac{\frac{\pi}{12}}{\frac{\pi}{8}}\right]^2 0{,}987 - 0{,}9996}{\left[\frac{\frac{\pi}{12}}{\frac{\pi}{8}}\right]^2 - 1} = 0{,}9996$$

6. Conclusiones

Los resultados obtenidos demuestran a su vez la relevancia de las herramientas de interpolación, en este caso, para funciones tabulares equiespaciadas y no equiespaciadas.

Las cotas de error, que pueden ser razonablemente estimadas, están en función, primordialmente, del tamaño del paso h. Si se considera, como un ejemplo, la aplicación a un sistema de muestreo a intervalos de tiempo muy pequeños puede percibirse que en la vida real los esquemas mostrados son muy pertinentes.

Referencias

Borras, H., Duran, R., y Iriarte, R. (1984). *Apuntes de métodos numéricos* (F. de Ingeniería UNAM, Ed.).

Burden, R., y Faires, D. (2011). *Análisis numérico* (C. Learning, Ed.).

Chapra, S., y Canale, R. (2015). *Métodos numéricos para ingenieros* (M. Hill, Ed.).

Gerald, C. (1991). *Análisis numérico* (Alfaomega, Ed.).

Luthe, R., Olivera, A., y Schutz, F. (1985). *Métodos numéricos.*

Olivera Salazar, A. (s.f.). *Métodos numéricos* (Limusa, Ed.).

Sandoval, H. (2017). *Métodos numéricos.*