Solución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales y de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior

Cortés Rosas Jesús Javier, González Cárdenas Miguel Eduardo
Pinilla Morán Víctor Damián, Salazar Moreno Alfonso
Tovar Pérez Víctor Hugo *

2019

Resumen

Esta publicación pertenece al proyecto *Plataforma educativa para Análisis Numérico*, realizado con al apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE105717.

Los métodos *paso a paso* o *predictores-correctores* proporcionan soluciones muy sencillas para ecuaciones diferenciales de primero orden. Sin embargo, es poco probable que el modelo de un fenómeno corresponda a este tipo de ecuaciones. Por lo general, los modelos se componen de ecuaciones de orden superior (dos o mayor) o bien, de sistemas de ecuaciones diferenciales. La manera de resolver estos nuevos esquemas es modificarlos para convertirlos en ecuaciones diferenciales de primer orden y utilizar los métodos correspondientes.

La sencillez de los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales no sería de utilidad si no hubiere la forma de resolver ecuaciones diferenciales de orden superior a uno. Dentro de la teoría de la solución de ecuaciones diferenciales se dispone de la herramienta que permite utilizar a los métodos de Euler, a los de Runge-Kutta y demás en problemas más reales.

1. Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales

El punto de partida para lograr potencializar los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales consiste en resolver sistemas de ecuaciones diferenciales. El requisito inicial es que las ecuaciones diferenciales que componen el sistema sean todas de primer orden.

En general, un sistema de ecuaciones diferenciales (en este caso de dos ecuaciones) tendrá la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y,z) \\ z' &= f(x,y,z) \end{aligned} \tag{1}$$

* Profesores de la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

En necesario conocer las condiciones iniciales de cada ecuación: $y(x_0)$ y $z(x_0)$. Adicionalmente, deberá establecerse un intervalo solución que inicie en x_0 y el tamaño del paso h.

Cualquiera de los métodos conocidos puede utilizarse sin mayores requerimientos. Ilustrando lo anterior se resolverá el siguiente sistema con el método de Euler-Gauss, aclarándose que cualquiera de los métodos analizados puede utilizarse.

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$y' = 4x - y + 1$$

$$z' = 2z - y$$

Con condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $z(0) = 1$ en el intervalo $[0, 0{,}5]$ con un paso $h = 0{,}1$.

De acuerdo a las ecuaciones recursivas del método Euler-Gauss:

$$y(x_{i+1p}) \; = y(x_i) \; + h\, f(x_i) \tag{2}$$

$$y(x_{i+1c}) \; = y(x_i) \; + \frac{h}{2} \; [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1p})] \tag{3}$$

Para $i = 0, 1, 2, ...$

Las ecuaciones recursivas del sistema son:

$$y_{i+1p} = y_i + h(4x_i - y_i + 1)$$

$$z_{i+1p} = z_i + h(2z_i - y_i)$$

$$y_{i+1c} = y_i + \tfrac{h}{2}[(4x_i - y_i + 1) + (4x_{i+1} - y_{i+1p} + 1)]$$

$$z_{i+1c} = z_i + \tfrac{h}{2}[(2z_i - y_i) + (2z_{i+1p} - y_{i+1c})]$$

La primera iteración cuando $i = 0$:

$$y_{1p} = y_0 + h(4x_0 - y_0 + 1)$$

$$z_{1p} = z_0 + h(2z_0 - y_0)$$

$$y_{1c} = y_0 + \tfrac{h}{2}[(4x_0 - y_0 + 1) + (4x_1 - y_{1p} + 1)]$$

$$z_{1c} = z_0 + \tfrac{h}{2}[(2z_0 - y_0) + (2z_{1p} - y_{1c})]$$

Sustituyendo valores:

La primera iteración cuando $i = 0$:

$$y_{1p} = 1 + (0{,}1)[4(0) - 1 + 1] = 1$$

$$z_{1p} = 1 + (0{,}1) * [2(1) - 1] = 1{,}1$$

$$y_{1c} = 1 + \tfrac{0{,}1}{2}[4(0) - (1) + 1) + 4(0{,}1) - 1 + 1)] = 1{,}02$$

$$z_{1c} = 1 + \tfrac{0{,}1}{2}[2(0) - (1) + 2(1{,}1) - 1{,}02] = 1{,}109$$

La primera iteración cuando $i = 0$:

$$y_{2p} = y_1 + h(4x_1 - y_1 + 1)$$

$$z_{2p} = z_1 + h(2z_1 - y_1)$$

$$y_{2c} = y_1 + \frac{h}{2}[(4x_1 - y_1 + 1) + (4x_2 - y_{2p} + 1)]$$

$$z_{2c} = z_1 + \frac{h}{2}[(2z_1 - y_1) + (2z_{2p} - y_{2c})]$$

Sustituyendo valores:

$$y_{2p} = 1{,}02 + (0{,}1)[4(0{,}1) - 1{,}02 + 1] = 1{,}058$$

$$z_{2p} = 1{,}1 + (0{,}1)[2(1{,}109 - 1{,}02] = 1{,}21288$$

$$y_{2c} = 1{,}02 + \frac{0{,}1}{2}[4(0{,}1) - (1{,}02) + 1 + 4(0{,}2) - 1{,}058 + 1)] = 1{,}0761$$

$$z_{2c} = 1{,}1 + \frac{0{,}1}{2}[2(0{,}1) - (1{,}02) + 2(1{,}0761) - 1{,}0761] = 1{,}23798$$

La solución completa es:

Cuadro 1: Solución del sistema de ecuaciones por Euler-Gauss

i	X	Y_p	Y_c	Z_p	Z_c
0	0		1,00000		1,00000
1	0,1	1,00000	1,02000	1,10000	1,10900
2	0,2	1,05800	1,07610	1,21288	1,23798
3	0,3	1,14849	1,16487	1,37796	1,38752
4	0,4	1,26838	1,28321	1,54854	1,55872
5	0,5	1,41489	1,42830	1,74215	1,75323

Como puede observarse el punto crítico en la solución de un sistema de ecuaciones es direccionar correctamente los puntos i y los $i+1$. Esta recomendación es válida para cualquiera de los métodos que se desee usar.

2. Solución de ecuaciones diferenciales de orden superior

Toda ecuación diferencial de orden superior a 1 puede transformarse en un sistema de ecuaciones diferenciales de orden uno a través de una serie de transformaciones sencillas. Supóngase la ecuación diferencial:

$$y^{IV} - 5xy''' - 7y'' + 8y' - 2xy + 9 = 0 \tag{4}$$

Con condiciones iniciales: $y(0)$, $y'(0)$,$y''(0)$ y $y'''(0)$.

Se propone un cambio de variable. Sea: $u = y'$, sustituyendo en (4):

$$u''' - 5xu'' - 7u' + 8u - 2xy + 9 = 0 \tag{5}$$

De nuevo, se propone $w = u'$ en (5):

$$w'' - 5xw' - 7w + 8u - 2xy + 9 = 0 \tag{6}$$

Una vez más, se propone $z = w'$ en (7):

$$z' - 5xz - 7w + 8u - 2xy + 9 = 0 \tag{7}$$

Este proceso debe hacerse tantas veces sea necesario hasta alcanzar ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. En este caso, con las ecuaciones formadas por los cambios de variable y la ecuación (7) despejada se tiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{gathered} y' = u \\ u' = w \\ w' = z \\ z' = 5xz + 7w - 8u + 2xy - 9 \end{gathered} \tag{8}$$

En el mismo orden en que se hizo el cambio de variable deben asignarse las condiciones iniciales:

$$\begin{gathered} y(0) \\ y'(0) \Rightarrow u(0) \\ y''(0) \Rightarrow w(0) \\ y'''(0) \Rightarrow z(0) \end{gathered} \tag{9}$$

Con toda esta información puede resolverse este sistema con el método de preferencia.

Ejemplo de aplicación

Resolver el sistema:

$$x'' - y'' = t^2 \tag{10}$$

$$x'' + y'' = 4t \tag{11}$$

con condiciones iniciales:

$$x(0) = 8 \quad x'(0) = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \tag{12}$$

Transformando el sistema: despejando y'' de (10) y (11):

$$\begin{gathered} x'' = t^2 + y'' \\ x'' = 4t - y'' \end{gathered}$$

igualando:

$$\begin{gathered} t^2 + y'' = 4t - y'' \\ y'' + y'' = 4t - t^2 \\ 2y'' = 4t - y^2 \end{gathered}$$

$$y'' = 2t - \frac{1}{2}t^2 \tag{13}$$

Repitiendo el proceso para despejar x'' de (10) y (11):

$$\begin{gathered} y'' = x'' - t^2 \\ y'' = -x'' + 4t \end{gathered}$$

igualando:

$$\begin{gathered} x'' - t^2 = -x'' + 4t \\ x'' + x'' = 4t + t^2 \\ 2x'' = 4t + y^2 \end{gathered}$$

$$x'' = 2t + \frac{1}{2}t^2 \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 \\ 4t \end{bmatrix} \tag{15}$$

El sistema formado por las ecuaciones (13) y (14) también puede resolverse por la regla de Cramer:

$$\begin{vmatrix} t^2 & -1 \\ 4t & 1 \end{vmatrix} = t^2 + 4t$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -t^2 \\ 1 & 4t \end{vmatrix} = t^2 + 4t$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$x'' = \frac{t^2 + 4t}{2} = 2t + \frac{1}{2}t^2 \tag{16}$$

$$y'' = \frac{4t - t^2}{2} = 2t - \frac{1}{2}t^2 \tag{17}$$

Definición de variables:

$$x_1 = x$$
$$x_2 = x'$$
$$y_1 = y$$
$$y_2 = y'$$

El sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden queda:

$$\begin{array}{rcl} x_1' = x_2 & & x_1(0) = 8 \\ x_2' = 2t + \frac{1}{2}t^2 & ; & x_2(0) = 0 \\ y_1' = y_2 & ; & y_1(0) = 0 \\ y_2' = 2t - \frac{1}{2}t^2 & ; & y_2(0) = 0 \end{array}$$

Resolviendo el sistema por el método Euler-Gauss, las ecuaciones predictoras de recurrencia son:

$$x_{1(i+1)p} = x_{1(i)} + h[x_{2(i)}]$$
$$x_{2(i+1)p} = x_{2(i)} + h[2t_{(i)} + \tfrac{1}{2}t_{(i)}^2]$$
$$y_{1(i+1)p} = y_{1(i)} + h[y_{2(i)}]$$
$$y_{2(i+1)p} = y_{2(i)} + h[2t_{(i)} - \tfrac{1}{2}t_{(i)}^2]$$

Las ecuaciones de recurrencia correctoras son:

$$x_{1(i+1)c} = x_{1(i)} + \tfrac{h}{2}[x_{2(i)} + x_{2(i+1)p}]$$
$$x_{2(i+1)c} = x_{2(i)} + \tfrac{h}{2}[2t_{(i)} + \tfrac{1}{2}t_{(i)}^2 + 2t_{(i+1)} + \tfrac{1}{2}t_{(i+1)}^2]$$
$$y_{1(i+1)c} = y_{1(i)} + \tfrac{h}{2}[y_{2(i)} + y_{2(i+1)p}]$$
$$y_{2(i+1)c} = y_{2(i)} + \tfrac{h}{2}[2t_{(i)} - \tfrac{1}{2}t_{(i)}^2 + 2t_{(i+1)} - \tfrac{1}{2}t_{(i+1)}^2]$$

Cuadro 2: Solución del sistema de ecuaciones

t	x_{1p}	x_{2p}	y_{1p}	y_{2p}	x_{1c}	x_{2c}	y_{1c}	y_{2c}
0					8,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	8,00000	0,00000	0,00000	0,00000	8,00000	0,01025	0,00000	0,00975
0,2	8,00103	0,03075	0,00098	0,02925	8,00205	0,04150	0,00195	0,03850
0,3	8,00620	0,08350	0,00580	0,07650	8,00830	0,09475	0,00770	0,08525
0,4	8,01778	0,15925	0,01623	0,14075	8,02100	0,17100	0,01900	0,14900
0,5	8,03810	0,25900	0,03390	0,22100	8,04250	0,27125	0,03750	0,22875

La solución corresponde a las columnas de las variables x_{1c} y y_{1c}:

Cuadro 3: Solución del sistema de ecuaciones

t	X	Y
0	8,00000	0,00000
0,1	8,00000	0,00000
0,2	8,00205	0,00195
0,3	8,00830	0,00770
0,4	8,02100	0,01900
0,5	8,04250	0,03750

3. Conclusiones

La complejidad de esta propuesta no se compara en lo más mínimo con la correspondiente a los métodos analíticos, como el de la matriz exponencial o a través de una trasformada. Quizá el punto débil consista en el número de ecuaciones recursivas que deban procesarse; si de elije como método de solución a Runge-Kutta de 4^{o} orden, para nuestra ecuación diferencial de cuarto orden deberán crearse cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden, cada una con cinco ecuaciones recursivas lo que implica un total de 20 ecuaciones recursivas por iteración. Multiplíquese este número por el número de iteraciones deseadas.

No obstante lo anterior, estos métodos siguen siendo privilegiados por su sencillez y facilidad de desarrollo en computadoras.

Referencias

Borras, H., Duran, R., y Iriarte, R. (1984). *Apuntes de métodos numéricos* (F. de Ingeniería UNAM, Ed.).
Burden, R., y Faires, D. (2011). *Análisis numérico* (C. Learning, Ed.).
Chapra, S., y Canale, R. (2015). *Métodos numéricos para ingenieros* (M. Hill, Ed.).
García B., S. (2017). *Métodos numéricos.*
Gerald, C. (1991). *Análisis numérico* (Alfaomega, Ed.).
Gerald, C., y Wheatley, P. (2000). *Análisis numérico con aplicaciones* (P. Hall, Ed.).
Olivera Salazar, A. (s.f.). *Métodos numéricos* (Limusa, Ed.).
Sandoval, H. (2017). *Métodos numéricos.*
Zill, D. (1997). *Ecuaciones diferenciales con valores en la frontera* (M. G. Hill, Ed.).